INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXI. BAND DRITTES HEFT 1953

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

INGENIEUR-ARCHIV

XXI. BAND DRITTES HEFT 1953

Die stationären Bewegungen des selbsterregten Kreisels und ihre Stabilität.

Von R. Grammel.

1. Einleitung. Als selbsterregt soll ein Kreisel (d.h. ein Körper, der um einen in ihm und im Raum festen Punkt O unbeschränkt frei drehbar ist) bezeichnet werden, wenn der Momentvektor $\mathfrak{M}$ seines Antriebs ein im Kreisel fester Vektor ist — vorbehältlich einer späteren Erweiterung dieser Definition —, etwa verwirklicht durch einen oder mehrere körperfeste Rückstoßantriebe (wie sie bei einigen Anwendungen vorkommen). Seine Bewegung gehorcht den bekannten *Euler*schen Gleichungen, die in einem rechtshändigen, körperfesten Hauptachsenkreuz (x, y, z) mit den Hauptträgheitsmomenten A, B, C, den Komponenten ω_x, ω_y, ω_z des Drehvektors $\mathfrak{o}$ und den in diesem Falle festen Komponenten M_x, M_y, M_z des Vektors $\mathfrak{M}$ lauten:

$$\left.\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\,\omega_y\omega_z &= M_x, \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\,\omega_z\omega_x &= M_y, \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\,\omega_x\omega_y &= M_z. \end{aligned}\right| \tag{1}$$

Wir wollen hier aber nicht die Integration dieser Gleichungen versuchen, die meines Wissens bisher nur für den symmetrischen Kreisel ($B = C$) vollständig gelungen ist[1], sondern die Frage beantworten, ob ein derartiger Kreisel stationäre Bewegungen, und zwar zunächst solche in der Form von permanenten gleichförmigen Drehungen um sowohl körper- wie raumfeste Achsen vollziehen kann und, wenn ja, ob diese stabil sind, — Bewegungen also, bei denen $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$ ist. Dabei wollen wir aber von vornherein die zu $\mathfrak{M} = 0$ gehörenden permanenten Drehungen um Hauptachsen außer Betracht lassen, da deren Stabilitätsverhalten längst bekannt ist, und also $\mathfrak{M} \neq 0$ voraussetzen. Wir werden finden, daß es dann beim symmetrischen Kreisel eine (übrigens auch schon bekannte, aber noch nicht auf ihre Stabilität hin nachgeprüfte) ∞^3-fache Schar von solchen permanenten Drehungen gibt, welche „fast alle" stabil sind, beim unsymmetrischen Kreisel dagegen eine ∞^3-fache Schar solcher permanenten Drehungen, welche „fast alle" labil sind. Weiterhin werden wir noch untersuchen, wie man diese Labilität beseitigen kann. Und schließlich werden wir beweisen, daß es außer diesen permanenten Drehungen keine allgemeineren stationären Bewegungen des selbsterregten unsymmetrischen Kreisels gibt.

2. Der symmetrische Kreisel. Es sei $B = C$; dann verlangen[2] die Gleichungen (1) mit $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$ offensichtlich $M_x = 0$. Weil also der körperfeste Drehmomentvektor $\mathfrak{M}$ in der Äquatorebene des Kreisels durch O liegt, dürfen wir ohne Einschränkung $M_z = 0$ setzen, indem wir die y-Achse in die Richtung des Vektors $\mathfrak{M}$ fallen lassen. Dann folgt aus (1), daß bei konstanten Drehkomponenten ω_x und ω_z notwendigerweise ω_y verschwinden muß:

$$\omega_x = a, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = c, \tag{2}$$

und daß die Konstanten a und c mit $M_y = \mathfrak{M}$ verknüpft sind durch die Beziehung

$$M_y = (A - B)\,ac\,. \tag{3}$$

Dies ist eine altbekannte stationäre Bewegung, nämlich eine gleichförmige Drehung des Kreisels um eine Achse g durch O in einer Meridianebene, auf welcher der Drehmomentvektor $\mathfrak{M}$ vom Betrag (3) senkrecht steht, mit der Drehgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{a^2 + c^2}$ im einen oder im anderen Drehsinn um die Achse g (da nur das Vorzeichen des Produktes ac festliegt), also

[1] *U. T. Bödewadt*, Math. Z. 55 (1952) S. 310.

[2] Den belanglosen Fall $A = B = C$ des sogenannten Kugelkreisels wollen wir hier und im Folgenden stets ausschließen.

eine reguläre Präzession ohne Eigendrehung. Die permanenten Drehungen um die Symmetrieachse ($c=0$) oder um die Äquatorachsen ($a=0$) zählen dabei verabredungsgemäß nicht mit, da für sie auch $M_y=0$ wird.

Um die Stabilität dieser stationären Bewegungen unter der Wirkung des Momentes (3) festzustellen, fügen wir dem Drehvektor $\mathfrak{o}(a, 0, c)$ (2) eine kleine Störung hinzu, setzen also statt (2)

$$\omega_x = a + \varepsilon_1 e^{\varrho t}, \quad \omega_y = \varepsilon_2 e^{\varrho t}, \quad \omega_z = c + \varepsilon_3 e^{\varrho t}, \tag{4}$$

wobei ε_1, ε_2, ε_3 als klein von erster Ordnung gelten sollen, und prüfen nach, ob die Störung unter der Wirkung des Drehmomentes (3) anwächst oder nicht. Führt man die Werte (4) in die Gleichungen (1) mit $B=C$, $M_x=M_z=0$ ein und vernachlässigt Produkte der kleinen Größen ε_i, so kommt wegen (3)

$$\left.\begin{aligned} &A\varrho\varepsilon_1 = 0\,, \\ &B\varrho\varepsilon_2 + (A-B)(c\varepsilon_1 + a\varepsilon_3) = 0\,, \\ &B\varrho\varepsilon_3 - (A-B)a\varepsilon_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Damit ε_1, ε_2, ε_3 von Null verschieden sind (also eine Störung vorhanden ist), muß die Determinante der Koeffizienten von ε_1, ε_2, ε_3 der drei Gleichungen (5) verschwinden:

$$\begin{vmatrix} A\varrho & 0 & 0 \\ (A-B)c & B\varrho & (A-B)a \\ 0 & -(A-B)a & B\varrho \end{vmatrix} = 0\,,$$

und dies liefert die drei Werte

$$\varrho_1 = 0\,, \quad \varrho_{2,3} = \pm \frac{A-B}{B} a\, i\,. \tag{6}$$

Mithin gibt es für $a \neq 0$ keine Störung mit positivem Realteil von ϱ, also keine Störung, die vom Drehmoment (3) angefacht werden könnte; vielmehr gilt:

Die permanenten Drehungen des selbsterregten symmetrischen Kreisels sind, sowie ihre Komponente $a \neq 0$ ist, alle stabil, oder besser ausgedrückt: parastabil[1] (weil die Wurzel $\varrho = 0$ anzeigt, daß die Stabilität nicht vollständig in dem Sinne ist, daß jede Störung in Schwingungen um die ursprüngliche Bewegung bestünde).

Von der permanenten Drehung um die Symmetrieachse ($c = 0$) ist bekannt, daß sie vollständig stabil ist, von den permanenten Drehungen um alle Äquatorachsen ($a = 0$), daß sie labil sind (was auch daraus hervorgeht, daß dann nach (6) $\varrho_2 = \varrho_3 = 0$ würde, und das hat zusammen mit $\varrho_1 = 0$ bekanntlich Lösungen von der Form $\varepsilon + \varepsilon' t + \varepsilon'' t^2$ zur Folge). Man kann sagen, daß die Parastabilität der anderen Achsen vom „Pol" nach dem „Äquator" hin von vollständiger Stabilität bis zur Labilität abnimmt und mit Annäherung an den Äquator praktisch nur noch einen sehr geringen Stabilitätsgrad besitzt.

3. Der unsymmetrische Kreisel. Wir dürfen von jetzt an ohne Einschränkung

$$A > B > C \tag{7}$$

voraussetzen. Aus (1) folgt dann mit den Festwerten

$$\omega_x = a\,, \qquad \omega_y = b\,, \qquad \omega_z = c \tag{8}$$

zunächst

$$\left.\begin{aligned} (B-C)\,b\,c &= -M_x\,, \\ (A-C)\,c\,a &= +M_y\,, \\ (A-B)\,a\,b &= -M_z\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Aus (9) schließt man, daß keine der drei Komponenten M_x, M_y, M_z des Drehmomentes $\mathfrak{M}$ für sich allein verschwinden kann:

Drehmomentvektoren, die in einer der drei Hauptebenen von O liegen (aber in keiner Hauptachse), vermögen keine permanenten Drehungen zu unterhalten.

---

[1] Für die Definition der Parastabilität vgl. *R. Grammel*, Der Kreisel Bd. I, S. 57, S. 214, S. 240, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.

Dagegen gibt es nach (9) permanente Drehungen, wenn zwei von den drei Komponenten des Vektors $\mathfrak{M}$ verschwinden:

Drehmomentvektoren, die in einer der drei Hauptachsen liegen, vermögen eine permanente Drehung zu unterhalten, deren Drehvektor in der zu jener Hauptachse senkrechten Hauptebene liegt.

Zwischen den Drehkomponenten b, c bzw. c, a bzw. a, b und dem zugehörigen Drehmoment $|\mathfrak{M}| = M_x$ bzw. $= M_y$ bzw. $= M_z$ gilt die erste bzw. zweite bzw. dritte Gleichung (9), und offenbar sind diese Drehungen die Verallgemeinerungen der permanenten Drehungen des symmetrischen Kreisels von Abschnitt 2.

Sind schließlich alle drei Komponenten des Vektors $\mathfrak{M}$ von Null verschieden, so gibt (9) aufgelöst die folgenden Quadrate der Komponenten der permanenten Drehungen (8):

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{B-C}{(A-B)(A-C)}\,\frac{M_y M_z}{M_x}, \\ b^2 &= \frac{A-C}{(A-B)(B-C)}\,\frac{M_z M_x}{M_y}, \\ c^2 &= \frac{A-B}{(A-C)(B-C)}\,\frac{M_x M_y}{M_z}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Vorzeichen von a, b, c sind dabei durch (9) bestimmt, und dies liefert die Zuordnung der nebenstehenden Tabelle, aus der man folgendes entnimmt:

M_x	M_y	M_z	a	b	c
+	+	+	+	−	+
			−	+	−
+	−	−	+	+	−
			−	−	+
−	+	−	−	−	−
			+	+	+
−	−	+	−	+	+
			+	−	−
+	+	−	keine reellen Werte von a, b, c		
+	−	+			
−	+	+			
−	−	−			

Zu jedem vorgegebenen permanenten Drehvektor $\mathfrak{d}(a, b, c)$ gibt es ein körperfestes Drehmoment $\mathfrak{M}(M_x, M_y, M_z)$, das diese Drehung zu unterhalten vermag; aber nicht jedes vorgegebene Drehmoment $\mathfrak{M}$ kann eine reelle permanente Drehung $\mathfrak{d}$ unterhalten, sondern nur solche Drehmomente (von dann allerdings beliebiger Größe), deren Vektoren $\mathfrak{M}$ in einem der vier Oktanten des Hauptachsenkreuzes liegen, in welchen die gerichteten Achsen des größten, des mittleren und des kleinsten Hauptträgheitsmomentes in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System bilden, und der zugehörige Drehvektor $\mathfrak{d}$ liegt dann jedesmal in demjenigen Oktanten, der aus dem Oktanten von $\mathfrak{M}$ durch eine Viertelsdrehung um die zugehörige gerichtete Achse des größten Hauptträgheitsmomentes A im Sinne einer Rechtsschraube hervorgeht, oder auch in dem bezüglich des Nullpunktes O dazu symmetrischen Oktanten. (Zu jedem erlaubten Drehmoment $\mathfrak{M}$ gehören also auch beim unsymmetrischen Kreisel zwei permanente Drehungen von entgegengesetztem Drehsinn, aber gleichem Betrag.)

Multipliziert man die drei Gleichungen (9) der Reihe nach mit den Faktoren $-a$, $+b$, $-c$, so kommt $aM_x + bM_y + cM_z = 0$ und dies besagt:

Der körperfeste Momentvektor $\mathfrak{M}$ steht senkrecht auf dem Vektor $\mathfrak{d}$ der von ihm unterhaltenen permanenten Drehung.

Weil das Drehmoment $\mathfrak{M}$ demgemäß bei der Bewegung keine Leistung vollbringt, so geht hieraus auch noch hervor, daß dieses körperfeste Drehmoment zwar die permanente Drehung $\mathfrak{d}$ unterhalten, aber nicht hervorbringen kann. Um sie einzuleiten, bedarf es eines anfänglichen Drehstoßes mit den Komponenten Aa, Bb, Cc.

4. Die Stabilität der permanenten Drehungen. Wir untersuchen auch hier die Stabilität dieser Drehungen, indem wir zu a, b, c eine kleine Störung hinzufügen, also mit den Ansätzen

$$\omega_x = a + \varepsilon_1 e^{\varrho t}, \qquad \omega_y = b + \varepsilon_2 e^{\varrho t}, \qquad \omega_z = c + \varepsilon_3 e^{\varrho t} \tag{11}$$

in die Gleichungen (1) eingehen, dann Produkte der ε_i vernachlässigen und auf (9) achten. So entstehen drei lineare homogene Gleichungen für die ε_i, deren Koeffizientendeterminante die folgende Form hat und verschwinden muß:

$$\begin{vmatrix} A\varrho & -(B-C)c & -(B-C)b \\ (A-C)c & B\varrho & (A-C)a \\ -(A-B)b & -(A-B)a & C\varrho \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

oder geordnet

$$\alpha_0 \varrho^3 + \alpha_1 \varrho^2 + \alpha_2 \varrho + \alpha_3 = 0 \tag{13}$$

mit den Beiwerten

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= A\,B\,C\,, \\ \alpha_1 &= 0\,, \\ \alpha_2 &= A\,(A-B)\,(A-C)\,a^2 - B\,(A-B)\,(B-C)\,b^2 + C\,(A-C)\,(B-C)\,c^2\,, \\ \alpha_3 &= 2\,(A-B)\,(A-C)\,(B-C)\,a\,b\,c\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Wir nehmen zuerst den Sonderfall $a = 0$ (Drehachse in der (y, z)-Hauptebene). Hier hat die Gleichung (13) außer einer Wurzel $\varrho_1 = 0$ zwei entgegengesetzt gleiche

$$\left.\begin{matrix} \text{reelle} \\ \text{imaginäre} \end{matrix}\right\} \text{Wurzeln } \varrho_{2,3}\,, \quad \text{falls } \frac{c^2}{b^2} \lesseqgtr \frac{B\,(A-B)}{C\,(A-C)}\,, \tag{15}$$

im ersten Falle also eine reelle positive Wurzel ϱ_2, die zu Labilität der Bewegung führt, und dies trifft auch noch auf den Grenzfall des Gleichheitszeichens in (15) zu. Im Falle imaginärer Wurzeln $\varrho_{2,3}$ wird man wegen der Wurzel $\varrho_1 = 0$ wieder nur von Parastabilität sprechen.

In gleicher Weise kommen für $b = 0$ (Drehachse in der (x, z)-Hauptebene) außer $\varrho_1 = 0$ in jedem Falle zwei imaginäre Wurzeln $\varrho_{2,3}$, was Parastabilität bedeutet.

Endlich für $c = 0$ (Drehachse in der (x, y)-Hauptebene) hat man außer $\varrho_1 = 0$ zwei entgegengesetzt gleiche

$$\left.\begin{matrix} \text{reelle} \\ \text{imaginäre} \end{matrix}\right\} \text{Wurzeln } \varrho_{2,3}\,, \quad \text{falls } \frac{a^2}{b^2} \lesseqgtr \frac{B\,(B-C)}{A\,(A-C)}\,, \tag{16}$$

im ersten Falle also Labilität, einschließlich des Gleichheitszeichens in (16), im zweiten Falle Parastabilität. Wir fassen zusammen:

Abgesehen von den völlig stabilen permanenten Drehungen um die Achse des größten und um die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes ($\mathfrak{M} = 0$) sind alle permanenten Drehungen des selbsterregten unsymmetrischen Kreisels um die Nullpunktsachsen der Hauptebene des größten und kleinsten Trägheitsmomentes parastabil, ebenso um diejenigen Nullpunktsachsen der Hauptebene des kleinsten und mittleren Trägheitsmomentes, die mit der mittleren Hauptachse einen Winkel

$$\varphi > \varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{B\,(A-B)}{C\,(A-C)}} \tag{17}$$

bilden, und ebenso um diejenigen Nullpunktsachsen der Hauptebene des größten und mittleren Trägheitsmomentes, die mit der mittleren Hauptachse einen Winkel

$$\varphi > \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{B\,(B-C)}{A\,(A-C)}} \tag{18}$$

bilden (in den letzten beiden Fällen also hinreichend weit von der mittleren Hauptachse abstehen, zu welcher bekanntlich eine labile permanente Drehung mit $\mathfrak{M} = 0$ gehört). Die permanenten Drehungen um die übrigen Nullpunktsachsen in den Hauptebenen des kleinsten und mittleren sowie des größten und mittleren Trägheitsmomentes ($\varphi \leq \varphi_1$ und $\varphi \leq \varphi_2$) sind labil.

Und nun werden wir vollends beweisen:

Die permanenten Drehungen um alle anderen Nullpunktsachsen des selbsterregten unsymmetrischen Kreisels, die in keiner der drei Hauptebenen liegen, sind labil.

Dies folgt in der Tat rasch aus (13) und (14) an Hand der *Hermite-Hurwitz*schen Bedingungen[1] dafür, daß eine Gleichung dritten Grades keine Wurzeln mit positivem Realteil be-

[1] Sie werden in der Regel nach *Hurwitz* oder nach *Routh* benannt, finden sich aber im wesentlichen schon bei *Ch. Hermite*, Crelles Journ. 52 (1850) S. 39, auf welchen sich *A. Hurwitz* ausdrücklich bezieht.

sitzt. Sie lauten

$$\alpha_0 > 0\,, \quad \alpha_1 \geq 0\,, \quad \alpha_3 \geq 0\,, \quad \alpha_1\,\alpha_2 - \alpha_0\,\alpha_3 > 0\,. \tag{19}$$

In unserem Falle ist $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_3 \neq 0$ für $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, und somit widersprechen sich die dritte und vierte Bedingung (19) für $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, womit der Beweis erbracht ist.

Das Ergebnis, daß die von einem körperfesten Drehmoment $\mathfrak{M}$ unterhaltenen permanenten Drehungen eines unsymmetrischen Kreisels „fast alle" labil sind, ist erstaunlich, zumal da es einem anderen bekannten Ergebnis der Kreiseltheorie zunächst schroff zu widersprechen scheint. Wie *Staude* entdeckt hat, besitzt nämlich ein unsymmetrischer Kreisel, dessen Schwerpunkt nicht mit seinem Stützpunkt O zusammenfällt, unendlich viele Achsen durch O, um welche er, wenn sie lotrecht gestellt sind, unter dem Einfluß der Schwerkraft permanente Drehungen vollziehen kann. Diese Achsen liegen auf einem Kegel zweiter Ordnung, der durch die drei Hauptachsen geht und also stets auch unendlich viele Achsen enthält, die in keiner der drei Hauptachsen liegen. Die Stabilitätsverhältnisse der Staudeschen Drehachsen sind genau bekannt[1]: der Staudesche Kegel enthält im allgemeinen neben unendlich vielen labilen auch unendlich viele stabile Drehachsen, also auch solche, die wir soeben als labil nachgewiesen haben. Nun werden aber doch auch die Staudeschen permanenten Drehungen durch ein körperfestes Drehmoment unterhalten, nämlich durch das Moment $\mathfrak{M}_g$ des Kreiselgewichts bezüglich O, und dieses Moment $\mathfrak{M}_g$ könnte man offenbar anstatt durch die Schwerkraft ebensogut durch einen körperfesten Rückstoßantrieb vom Moment $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_g$ erzeugen. Der scheinbare Widerspruch, der darin besteht, daß dann eine bisher (unter der Wirkung von $\mathfrak{M}_g$) stabile Drehachse plötzlich labil wird, löst sich indessen ganz einfach durch die Erkenntnis auf, daß das Moment $\mathfrak{M}_g$ der Schwere zwar bei der permanenten Staudeschen Drehung körperfest ist, bei einer Störung aber — infolge der Änderung der Schwerpunktslage gegenüber dem Stützpunkt — sich im Körper (und im Raum) ändert, wogegen ein seiner Natur nach körperfestes Drehmoment, wie wir es hier immer voraussetzen, auch bei einer Störung der permanenten Drehung im Kreisel fest bleibt. Die Stabilität der wirklich stabilen Staudeschen Drehachsen wird eben dadurch erzeugt, daß das Schweremoment $\mathfrak{M}_g$ bei einer Störung sich selbst im stabilisierenden Sinne ändert.

5. Die Stabilisierung der labilen permanenten Drehungen. Die letzte Bemerkung führt nun auch vollends zur Beantwortung der praktisch wichtigen Frage, mit welchen Mitteln man die als labil erkannten permanenten Drehungen eines selbsterregten unsymmetrischen Kreisels stabilisieren kann. Man muß offenbar das Drehmoment $\mathfrak{M}$ in einem stabilisierenden Sinne steuern. Soweit dies vom Kreisel selbst aus möglich ist, wollen wir ihn immer noch selbsterregt nennen, obwohl bei einer solchen Steuerung das Drehmoment $\mathfrak{M}$ nicht mehr ein im körperfesten Bezugssystem konstanter Vektor sein wird.

Da man den Drehvektor $\mathfrak{o}$ eines Körpers grundsätzlich durch Hilfsmittel im Körper selbst registrieren kann (die mechanischen Versuche zum Nachweis der Erddrehung leisten dies mehr oder weniger vollkommen) und dann auch in seine Komponenten ω_x, ω_y, ω_z im körperfesten System zu zerlegen vermag, so kommen vor allem gesteuerte Drehmomente $\mathfrak{M}$ in Frage, deren Komponenten M_x, M_y, M_z von ω_x, ω_y, ω_z abhängen. Der einfachste Ansatz, der, wie wir bestätigen werden, auch zum Ziele führt, lautet

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_x^0 - m_x\,\omega_x\,, \\ M_y &= M_y^0 - m_y\,\omega_y\,, \\ M_z &= M_z^0 - m_z\,\omega_z\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Dabei sollen M_x^0, M_y^0, M_z^0, m_x, m_y, m_z Festwerte sein. Die Komponenten a, b, c des zugehörigen permanenten Drehvektors $\mathfrak{o}$ gehorchen nach (1) und (20) den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} M_x^0 &= m_x\,a - (B - C)\,b\,c\,, \\ M_y^0 &= m_y\,b + (A - C)\,c\,a\,, \\ M_z^0 &= m_z\,c - (A - B)\,a\,b\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Diese kann man zwar nicht in geschlossener Form nach a, b, c auflösen; man kann aber aus ihnen zu jedem Wertesatz a, b, c bei frei gewählten „Steuerungskonstanten" m_x, m_y, m_z die „Hauptkomponenten" M_x^0, M_y^0, M_z^0 von $\mathfrak{M}$ berechnen.

[1] *R. Grammel*, Math. Z. 6 (1920) S. 124, oder Der Kreisel, Bd. I, S. 178.

Geht man jetzt mit dem Störungsansatz (11) in (1) samt (20) ein und beachtet (21), so kommt statt (12)

$$\begin{vmatrix} A\varrho + m_x & -(B-C)c & -(B-C)b \\ (A-C)c & B\varrho + m_y & (A-C)a \\ -(A-B)b & -(A-B)a & C\varrho + m_z \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

oder aufgelöst, die Gleichung (13) mit den neuen Beiwerten

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= A\,B\,C\,, \\ \alpha_1 &= B\,C\,m_x + C\,A\,m_y + A\,B\,m_z\,, \\ \alpha_2 &= A\,(A-B)\,(A-C)\,a^2 - B\,(A-B)\,(B-C)\,b^2 + C\,(A-C)\,(B-C)\,c^2 + \\ &\quad + A\,m_y\,m_z + B\,m_z\,m_x + C\,m_x\,m_y\,, \\ \alpha_3 &= 2\,(A-B)\,(A-C)\,(B-C)\,a\,b\,c + m_x\,m_y\,m_z + \\ &\quad + (A-B)\,(A-C)\,a^2\,m_x - (A-B)\,(B-C)\,b^2\,m_y + (A-C)\,(B-C)\,c^2\,m_z\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Weil nach den Hermite-Hurwitzschen Stabilitätsbedingungen (19) neben $\alpha_0 > 0$ insbesondere auch α_1 und α_3 positiv sein müssen, so wird man die Steuerungskonstanten m_x und m_z positiv und m_y zunächst einmal gleich Null wählen. Mit $m_y = 0$ findet man aus (23) vollends

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\,\alpha_2 - \alpha_0\,\alpha_3 &= B\,(A-C)\,[(A-B)\,A^2\,a^2\,m_z - 2\,(A-B)\,(B-C)\,A\,C\,a\,b\,c + \\ &\quad + (B-C)\,C^2\,c^2\,m_x] + B^2\,[m_x\,m_z - (A-B)\,(B-C)\,b^2]\,(C\,m_x + A\,m_z) \quad (m_y = 0)\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Jetzt genügt es offenbar zur Stabilität für alle Drehungen, bei denen $b \neq 0$ ist und mindestens eine der Drehkomponenten a und c ebenfalls von Null verschieden ist, wenn man den Steuerungskonstanten die Werte

$$m_x = (A-B)\,|b|\,, \qquad m_y = 0\,, \qquad m_z = (B-C)\,|b| \tag{25}$$

erteilt; denn dann erhält man nach (23) und (24) jeweils für $b \gtrless 0$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= A\,B\,C > 0\,, \\ \alpha_1 &= B^2\,(A-C)\,|b| > 0\,, \\ \alpha_3 &= (A-C)\,[(A-B)\,a \pm (B-C)\,c]^2\,|b| > 0\,, \\ \alpha_1\,\alpha_2 - \alpha_0\,\alpha_3 &= B\,(A-B)\,(A-C)\,(B-C)\,(A\,a \mp C\,c)^2\,|b| > 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Somit sind alle Stabilitätsbedingungen (19) erfüllt und demgemäß alle Drehachsen, für welche $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ ist, aber auch diejenigen, für welche eine der beiden Drehkomponenten a und c verschwindet, stabil geworden, also auch die bisher nur parastabilen Drehachsen in den drei Hauptebenen.

Weil die Stabilität der Hauptachse des größten Trägheitsmoments ($b = 0$, $c = 0$) und derjenigen des kleinsten Trägheitsmoments ($a = 0$, $b = 0$) von vornherein feststeht, so bleibt jetzt nur noch die Stabilisierung der (bekanntlich von sich aus labilen) Hauptachse des mittleren Trägheitsmoments ($a = 0$, $b \neq 0$, $c = 0$) übrig, für welche natürlich von vornherein $M_x^0 = 0$, $M_z^0 = 0$ und $M_y^0 = m_y\,b$ sein muß, da es sich um eine permanente Drehung mit $\mathfrak{M} = 0$ handelt. Hier folgt aus (23) mit $a = 0$, $c = 0$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_3 &= [m_x\,m_z - (A-B)\,(B-C)\,b^2]\,m_y\,, \\ \alpha_1\,\alpha_2 - \alpha_0\,\alpha_3 &= B^2\,[m_x\,m_z - (A-B)\,(B-C)\,b^2]\,(C\,m_x + A\,m_z) + \\ &\quad + 2\,A\,B\,C\,m_x\,m_y\,m_z + A\,C\,m_y^2\,(C\,m_x + A\,m_z) + B\,m_y\,(C^2\,m_x^2 + A^2\,m_z^2)\,, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

und man erkennt, daß mit

$$m_x > (A-B)\,|b|\,, \qquad m_y > 0\,, \qquad m_z = (B-C)\,|b| \tag{28}$$

alle Stabilitätsbedingungen (19) befriedigt werden, so daß nun auch die mittlere Hauptachse stabil geworden ist.

Man stellt aber darüber hinaus leicht fest, daß mit (28) auch in allen früheren Fällen die Stabilität ebenso verbürgt ist wie mit (25), und hat somit das Ergebnis:

Mit Steuerungskonstanten m_x, m_y, m_z, welche die Vorschrift (28) erfüllen, lassen sich alle permanenten Drehungen des selbsterregten unsymmetrischen Kreisels völlig stabil machen.

Endlich wollen wir nur noch darauf hinweisen, daß man die Stabilisierung statt mit dem Ansatz (20) in gleicher Weise auch mit dem viel allgemeineren Ansatz

$$M_x = F_1(\omega_x)\,, \qquad M_y = F_2(\omega_y)\,, \qquad M_z = F_3(\omega_z) \tag{29}$$

versuchen und untersuchen kann, worin F_1, F_2, F_3 gegebene Funktionen sind, die an der Stelle $\omega_x = a$ bzw. $\omega_y = b$ bzw. $\omega_z = c$ Ableitungen besitzen. Hierbei ist a, b, c ein reelles Lösungstrippel der drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(B - C)\, b\, c &= -F_1(a)\,,\\ (A - C)\, c\, a &= +F_2(b)\,,\\ (A - B)\, a\, b &= -F_3(c)\,.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Für den Störungsansatz (11) hat man jetzt die Werte

$$\left.\begin{aligned}F_1(\omega_x) &= F_1(a) + F_1'(a)\,\varepsilon_1\, e^{\varrho t}\,,\\ F_2(\omega_y) &= F_2(b) + F_2'(b)\,\varepsilon_2\, e^{\varrho t}\,,\\ F_3(\omega_z) &= F_3(c) + F_3'(c)\,\varepsilon_3\, e^{\varrho t}\,,\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

in (1) zusammen mit (29) und (30) einzuführen. Man erkennt, daß dann die bisherigen Steuerungskonstanten m_x, m_y, m_z einfach durch die negativen Ableitungen $-F_1'(a)$, $-F_2'(b)$, $-F_3'(c)$ zu ersetzen sind. Sonst ändert sich an unseren Rechnungen und Ergebnissen nichts.

6. Beweis für die Nichtexistenz weiterer stationärer Bewegungen des selbsterregten unsymmetrischen Kreisels. Während der symmetrische Kreisel wenigstens in dem ausgearteten Fall $\mathfrak{M} = 0$ (als kräftefreier Kreisel) außer den in Abschnitt **2** erwähnten permanenten Drehungen auch noch allgemeinere stationäre Bewegungen vollziehen kann, nämlich seine bekannten regulären Präzessionen ω_p um eine raumfeste Achse nebst einer Eigendrehung ω_e um seine Symmetrieachse, so gibt es bekanntlich beim unsymmetrischen kräftefreien Kreisel außer seinen permanenten Drehungen um seine drei Hauptachsen keine weiteren stationären Bewegungen. Hier erhebt sich nun die naheliegende Frage, ob nicht der selbsterregte unsymmetrische Kreisel ($\mathfrak{M} \neq 0$) außer den in Abschnitt **3** aufgezählten permanenten Drehungen (um raum- und zugleich körperfeste Achsen) noch allgemeinerer stationärer Bewegungen fähig ist, etwa einer Eigendrehung $\omega_e \neq 0$ von festem Betrag um seine (körperfeste) Hauptachse und zugleich einer Präzessionsdrehung $\omega_p \neq 0$ von ebenfalls festem Betrag um eine raumfeste Achse, die den festen Winkel $\delta \neq 0$ mit jener Hauptachse bildet. Daß eine solche Bewegung beim selbsterregten unsymmetrischen Kreisel nicht möglich ist, ließe sich leicht an Hand der Gleichungen (1) zeigen. Wir wollen aber sogleich die viel allgemeinere Behauptung beweisen:

Die permanenten Drehungen (10) sind die einzigen stationären Bewegungen, deren der selbsterregte unsymmetrische Kreisel (bei festem $\mathfrak{M}$) fähig ist.

Die allgemeinste stationäre Bewegung, welche ein starrer Körper, der sich um einen festen Punkt O frei drehen kann, kinematisch zu vollziehen vermag, setzt sich zusammen aus einer Eigendrehung $\mathfrak{v}_e$ von festem Betrag ω_e um eine körperfeste Achse durch O, die aber keine Hauptachse sein muß (es jedoch sein darf), und einer Präzessionsdrehung $\mathfrak{v}_p$ von festem Betrag ω_p um eine raumfeste Achse durch O, wobei die Vektoren $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_p$ den festen Winkel δ miteinander bilden. Legt man nun eine körperfeste x^*-Achse in die Richtung des Eigendrehvektors $\mathfrak{v}_e$, so ist die dortige Drehkomponente

$$\omega_x^* = \omega_e + \omega_p \cos\delta\,. \tag{32}$$

Die körperfesten y^*- und z^*-Achsen, die die x^*-Achse zu einem rechtshändigen, rechtwinkligen Koordinatensystem ergänzen, laufen in einer zum Vektor $\mathfrak{v}_e$ senkrechten Ebene durch O mit der Drehgeschwindigkeit ω_e um, und man darf dann mit einem geeignet definierten Nullpunkt des Drehwinkels φ der Drehung ω_e die zugehörigen Drehkomponenten in der Form

$$\omega_y^* = \omega_p \sin\delta \sin\varphi\,, \quad \omega_z^* = \omega_p \sin\delta \cos\varphi \quad \text{mit} \quad \dot{\varphi} = \omega_e \tag{33}$$

ansetzen. Durch (32) und (33) ist mit festen Werten ω_e, ω_p, δ die allgemeinste stationäre Bewegung des Kreisels kinematisch dargestellt.

Um sie auch dynamisch untersuchen zu können, müssen wir die Eulerschen Gleichungen (1) von dem Hauptachsenkreuz (x, y, z) auf unser jetziges Achsenkreuz (x^*, y^*, z^*) transformieren. Dies geschieht am schnellsten folgendermaßen. Die Trägheitsmomente um die x^*-, y^*-, z^*-Achse seien A^*, B^*, C^*. Da sie im allgemeinen keine Hauptträgheitsmomente sind, so hat der Drehimpulsvektor $\mathfrak{D}'$, der zu einer Drehkomponente ω_x^* gehört, außer einer Komponente $D_x' = A^* \omega_x^*$ in der x^*-Achse im allgemeinen auch noch Komponenten in der y^*- und z^*-Achse, nämlich

$$D_y' = W_{12}^*\, \omega_x^*\,, \qquad D_z' = W_{31}^*\, \omega_x^*\,,$$

wenn man die sogenannten Kippmomente[1]

$$W_{23}^* = -\int y^* z^* \, dm\,, \quad W_{31}^* = -\int z^* x^* \, dm\,, \quad W_{12}^* = -\int x^* y^* \, dm \tag{34}$$

des Körpers einführt, wo jeweils über die Massenelemente dm des Kreisels zu integrieren ist. Somit hat man für die drei Komponenten D_x^*, D_y^*, D_z^* des gesamten Drehimpulses im (x^*, y^*, z^*)-System

$$D_x^* = A^* \omega_x^* + W_{12}^* \omega_y^* + W_{31}^* \omega_z^* \tag{35}$$

und zwei daraus zyklisch hervorgehende Ausdrücke für D_y^* und D_z^*. Zerlegt man jetzt die vektoriell geschriebene Eulersche Gleichung (1)

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} + [\mathfrak{o}\,\mathfrak{D}] = \mathfrak{M}$$

in ihre Komponenten im (x^*, y^*, z^*)-System, so kommt

$$\left.\begin{aligned} A^* \dot{\omega}_x^* + W_{12}^* \dot{\omega}_y^* + W_{31}^* \dot{\omega}_z^* + W_{23}^* (\omega_y^{*2} - \omega_z^{*2}) + \\ + (C^* - B^*) \omega_y^* \omega_z^* + W_{31}^* \omega_x^* \omega_y^* - W_{12}^* \omega_x^* \omega_z^* = M_x^* \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

sowie zwei daraus zyklisch hervorgehende weitere Gleichungen[2]. Hierbei sind natürlich M_x^*, M_y^*, M_z^* die festen Komponenten des Vektors $\mathfrak{M}$ im (x^*, y^*, z^*)-System.

Gehen wir jetzt mit (32) und (33) in die Gleichung (36) ein, so lautet sie

$$(W_{31}^* \sin\varphi - W_{12}^* \cos\varphi)\, \omega_p^2 \sin\delta\cos\delta + \left[\frac{1}{2}(C^* - B^*)\sin 2\varphi - W_{23}^* \cos 2\varphi\right] \omega_p^2 \sin^2\delta = M_x^*\,.$$

Weil rechts das feste Moment M_x^* steht, so muß auch die linke Seite einen festen Wert haben. Hierfür gibt es aber nur folgende Möglichkeiten:

1. $\omega_e = 0$, also $\varphi = \text{konst.}$,
2. $\omega_e \neq 0$, dann aber entweder
   a) $\omega_p = 0$ (und also $M_x^* = 0$), oder
   b) $\delta = 0$ oder π (und also $M_x^* = 0$), oder
   c) $\delta = \pi/2$, $B^* = C^*$, $W_{23}^* = 0$ (und also $M_x^* = 0$), oder
   d) $W_{23}^* = W_{31}^* = W_{12}^* = 0$, $B^* = C^*$ (und also $M_x^* = 0$).

Die Fälle 1. sowie 2a) und 2b) sind offenbar nur wieder permanente Drehungen, wie wir sie von Abschnitt **3** her kennen. Die Fälle 2c) bzw. 2d) lassen die erste der beiden aus (36) zyklisch entstehenden Gleichungen übergehen in

$$A^* \omega_e \omega_p \cos\varphi + \frac{1}{2}(W_{12}^* \sin 2\varphi + W_{31}^* \cos 2\varphi)\,\omega_p^2 - W_{31}^* \left(\omega_e^2 - \frac{1}{2}\omega_p^2\right) = M_y^* \tag{37}$$

bzw. in

$$[A^* \omega_e + (A^* - B^*)\omega_p \cos\delta]\,\omega_p \sin\delta\cos\varphi = M_y^*\,. \tag{38}$$

Gleichung (37) verlangt entweder $\omega_e = 0$, also $\varphi = \text{konst.}$ oder $\omega_p = 0$ und bedeutet also ebenfalls eine permanente Drehung. Gleichung (38) verlangt entweder $\omega_p = 0$ oder $\delta = 0$ oder π, was wieder permanente Drehungen bedeutet, oder aber das Erfülltsein der Bedingung

$$A\,\omega_e + (A - B)\,\omega_p \cos\delta = 0\,, \tag{39}$$

wobei wir die Sterne fortlassen durften, da es sich ja wegen 2d) um ein Hauptachsenkreuz handelt. Man bestätigt, daß für diesen selben Fall 2d) die letzte der beiden aus (36) zyklisch entstehenden Gleichungen ebenfalls auf permanente Drehungen oder aber auf die Bedingung (39) führt, und diese Bedingung (39) ist ja einfach diejenige für die kräftefreie Präzession des symmetrischen Kreisels, welche hierdurch als die einzige mögliche stationäre Bewegung außer den permanenten Drehungen nachgewiesen ist. Damit ist der Beweis geschlossen.

(Eingegangen am 1. Oktober 1952.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *R. Grammel*, Stuttgart-N, Robert-Bosch-Str. 101.

---

[1] Vgl. etwa *R. Grammel*, Der Kreisel, Bd. I, S. 21.

[2] Diese Gleichungen sind im deutschen Schrifttum wenig bekannt, aber nicht neu; schon *L. Euler* hat sie gefunden und veröffentlicht in seiner Arbeit: Découverte d'un nouveau principe de mécanique, Mém. Acad. Royale Berlin, 6 (1750) S. 213.

Anwendung der Matrizenrechnung zur Erfassung von Betriebsabläufen.

Von O. Pichler.

1. Einleitung. In einer früheren Arbeit[1] wurde gezeigt, wie sich die Matrizenrechnung bei betriebswirtschaftlichen Aufgaben in einem aus vielen Teilbetrieben bestehenden Industriewerk mit Vorteil anwenden läßt. Das angewandte Verfahren beruhte darauf, daß die Betriebsvorgänge eines einzelnen Teilbetriebes mit praktisch hinreichender Genauigkeit durch eine Matrix beschrieben werden können. Aus diesen einzelnen Teilmatrizen läßt sich dann unter Berücksichtigung der zwischen den einzelnen Teilbetrieben bestehenden Kopplung und unter weitgehender Benutzung des Matrizenkalküls eine das gesamte Betriebssystem kennzeichnende Strukturmatrix aufbauen. An zwei einfachen Beispielen, der unverzweigten Betriebskette und der Betriebskette mit Rückführung wurde dies ausführlich erläutert. Im folgenden soll nun zunächst gezeigt werden, wie sich das Verfahren bei allgemeineren Kopplungsbedingungen anwenden läßt; sodann soll auf die weiteren Möglichkeiten eingegangen werden, die der Matrizenkalkül bietet, um die Matrizen in eine für betriebswirtschaftliche Aufgaben möglichst geeignete Form zu bringen.

2. Konforme Kopplungsbedingungen. Ein Teilbetrieb i eines aus m Teilbetrieben bestehenden Betriebssystemes sei durch seinen als Vektor darzustellenden Durchsatz $\mathfrak{d}_i$ gekennzeichnet (s. Abb. 1). Der Durchsatz $\mathfrak{d}_i$ gibt die dem Teilbetrieb i zur Verarbeitung zugeführte Stoffmenge (man denke etwa an ein Gas mit n Komponenten) an, aus der neben der Ausbeute $\mathfrak{a}_i$, die als Zwischenprodukt anzusprechen ist und anderen Teilbetrieben zur Weiterverarbeitung zugeleitet wird, auch noch ein Fertigprodukt $\mathfrak{f}_i$ entsteht. Es werde angenommen, daß sich der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{d}_i$, $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{f}_i$ durch die Vektorengleichungen

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{U}_i\,\mathfrak{d}_i\,, \qquad \mathfrak{f}_i = \mathfrak{B}_i\,\mathfrak{d}_i \tag{1}$$

mit praktisch hinreichender Genauigkeit beschreiben läßt. Um nun auch die Kopplung des vorliegenden Betriebssystems zu beschreiben, muß angegeben werden, in welcher Weise die Ausbeuten zur Weiterverarbeitung auf die einzelnen Teilbetriebe verteilt werden. In einem Ansatz, der eine solche Verteilung beschreibt, soll aber zum Ausdruck kommen, daß bei einer Aufteilung der Ausbeute $\mathfrak{a}_k$ in m Teile gemäß

Abbildung 1.

$$\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_{1k} + \mathfrak{a}_{2k} + \cdots + \mathfrak{a}_{mk}$$

sämtliche Vektoren $\mathfrak{a}_{ik}$ dieselbe Zusammensetzung haben, so daß also

$$\mathfrak{a}_{ik} = w_{ik}\,\mathfrak{a}_k$$

mit skalarem w_{ik} gesetzt werden muß. Eine Kopplung dieser Art, die besonders in der chemischen Industrie vorkommt, soll als „konforme Kopplung" bezeichnet werden zum Unterschied von der „durchsatzbedingten Kopplung", bei der diese Zusatzbedingung nicht besteht und die im Abschnitt 3d behandelt wird. Um zu einem endgültigen Ansatz für die konformen Kopplungsbedingungen zu kommen, ist noch zu berücksichtigen, daß die Durchsätze $\mathfrak{d}_i$ nicht allein durch die verschiedenen $\mathfrak{a}_{ik}$ gebildet werden, sondern daß dazu auch noch von außen an das Betriebssystem gelieferte Rohprodukte $\mathfrak{r}_j$ treten können, hinsichtlich deren Verteilung dasselbe wie bei den Ausbeuten $\mathfrak{a}_k$ gelten soll. Dann läßt sich eine Kopplung sehr allgemeiner Art durch den Ansatz

$$\mathfrak{d}_i = \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{a}_{ik} + \sum_{j=1}^{l} \mathfrak{r}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} w_{ik}\,\mathfrak{a}_k + \sum_{j=1}^{l} w^{*}_{ij}\,\mathfrak{r}_j \tag{2}$$

beschreiben, der angibt, wie sich der Durchsatz $\mathfrak{d}_i$ aus den Ausbeuten $\mathfrak{a}_k$ der m Betriebe und aus den l in das betrachtete Betriebssystem eingehenden Rohprodukten zusammensetzt. Die Verteilungskoeffizienten w_{ik} und w^{*}_{ij} müssen den Bedingungen

$$0 \leq w_{ik} \leq 1\,, \qquad 0 \leq w^{*}_{ij} \leq 1$$

und

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} w_{ik} \leq 1\,, \qquad 0 \leq \sum_{i=1}^{m} w^{*}_{ij} \leq 1$$

[1] *O. Pichler*, Ing.-Archiv 21 (1953) S. 119. im folgenden zitiert mit I.

genügen. Die Ausdrücke:

$$\mathfrak{z}_k = (1 - \sum_{i=1}^{m} w_{ik})\,\mathfrak{a}_k \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{z}_j^* = (1 - \sum_{i=1}^{m} w_{ij}^*)\,\mathfrak{r}_j \tag{3}$$

geben die im Betriebssystem nicht weiter verarbeiteten und (mit Einschluß etwaiger Leitungsverluste) nach außen abgegebenen Ausbeuten und Rohprodukte an und sollen als „Zwischenproduktabgaben" bezeichnet werden. Dabei ist übrigens auch der Fall, daß $\mathfrak{z}_j^*$ vorkommt, praktisch durchaus möglich. Die Wahl skalarer Verteilungsgrößen w_{ik} und w_{jk}^* ist, wie bereits erwähnt, notwendig, um zum Ausdruck zu bringen, daß sämtliche Komponenten von $\mathfrak{a}_k$ und $\mathfrak{r}_j$ in gleicher Weise verteilt werden. Man kann nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit — wenn nötig durch Einfügen weiterer Komponenten vom Betrag Null — annehmen, daß sämtliche Vektoren $\mathfrak{d}_i$, $\mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{r}_j$ sowie die Fertigproduktvektoren $\mathfrak{f}_i$ von der Dimension n sind; dann läßt sich mit den Skalarmatrizen

$$\mathfrak{W}_{ik} = w_{ik}\,\mathfrak{E}_n \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{W}_{ij}^* = w_{ij}^*\,\mathfrak{E}_n \qquad (\mathfrak{E}_n\ n\text{-reihige Einheitsmatrix})$$

die Betriebskopplung durch den Ansatz darstellen

$$\mathfrak{d} = \begin{pmatrix} \mathfrak{d}_1 \\ \mathfrak{d}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{d}_m \end{pmatrix} = (\mathfrak{W}_{ik}) \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{a}_m \end{pmatrix} + (\mathfrak{W}_{ij}^*) \begin{pmatrix} \mathfrak{r}_1 \\ \mathfrak{r}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{r}_l \end{pmatrix} = (\mathfrak{W}_{ik})\,\mathfrak{a} + (\mathfrak{W}_{ij}^*)\,\mathfrak{r}\,, \tag{4}$$

oder mit Einführung der „Kopplungsmatrizen"

$$\mathfrak{W} = (\mathfrak{W}_{ik}) \qquad (mn \text{ Zeilen und Spalten}),$$
$$\mathfrak{W}^* = (\mathfrak{W}_{ij}^*) \qquad (mn \text{ Zeilen und } ln \text{ Spalten}):$$
$$\mathfrak{d} = \mathfrak{W}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{W}^*\,\mathfrak{r}\,.$$

Führt man noch die Matrizen

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \mathfrak{U}_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{V} = \begin{pmatrix} \mathfrak{V}_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \mathfrak{V}_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \mathfrak{V}_m \end{pmatrix}$$

mit je mn Zeilen und Spalten ein, so ist das gesamte Betriebssystem durch folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \mathfrak{U}\,\mathfrak{d}\,, \\ \mathfrak{f} &= \mathfrak{V}\,\mathfrak{d}\,, \end{aligned}\right\} \text{(Umsatzgleichungen)}$$
$$\mathfrak{d} = \mathfrak{W}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{W}^*\,\mathfrak{r} \quad \text{(Kopplungsgleichungen)} \tag{5}$$

gekennzeichnet. Setzt man die erste Umsatzgleichung in die Kopplungsgleichung ein, so folgt

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{W}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{d} + \mathfrak{W}^*\,\mathfrak{r}\,,$$
$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{W}\,\mathfrak{U})\,\mathfrak{d} = \mathfrak{W}^*\,\mathfrak{r}\,.$$

Ist $(\mathfrak{E} - \mathfrak{W}\,\mathfrak{U})$ nicht singulär, so wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{d} &= (\mathfrak{E} - \mathfrak{W}\,\mathfrak{U})^{-1}\,\mathfrak{W}^*\,\mathfrak{r}\,, \\ \mathfrak{a} &= \mathfrak{U}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{W}\,\mathfrak{U})^{-1}\,\mathfrak{W}^*\,\mathfrak{r}\,, \\ \mathfrak{f} &= \mathfrak{V}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{W}\,\mathfrak{U})^{-1}\,\mathfrak{W}^*\,\mathfrak{r} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

oder zusammengefaßt

$$\mathfrak{l} = \begin{pmatrix} \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a} \\ \mathfrak{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{U} \\ \mathfrak{V} \end{pmatrix} (\mathfrak{E} - \mathfrak{W}\,\mathfrak{U})^{-1}\,\mathfrak{W}^*\,\mathfrak{r} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{r}\,, \tag{6a}$$

wo nunmehr der „Betriebsablauf" $\mathfrak{l}$ als Funktion des Rohproduktvektors $\mathfrak{r}$ dargestellt ist.

Die Beschränkung, die in dem Ansatz (1) insofern liegt, als für jeden Teilbetrieb nur eine Ausbeute und nur ein Fertigprodukt vorgesehen ist, läßt sich durch den erweiterten Ansatz

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{i1} \\ \mathfrak{a}_{i2} \\ \cdot \\ \mathfrak{a}_{i\sigma_i} \end{pmatrix} = \mathfrak{U}_i\,\mathfrak{d}_i \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_{i1} \\ \mathfrak{f}_{i2} \\ \cdot \\ \mathfrak{f}_{i\sigma_i} \end{pmatrix} = \mathfrak{V}_i\,\mathfrak{d}_i \tag{1a}$$

aufheben. Man hat dann s_i Ausbeuten und σ_i Fertigprodukte im Betrieb i, für das gesamte Betriebssystem aber $s = \sum_{i=1}^{m} s_i$ Ausbeuten und $\sigma = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i$ Fertigprodukte. In den Gleichungen (2) und (3) ist dann lediglich der obere Summenzeiger m durch s zu ersetzen, desgleichen in Gleichung (4) $\mathfrak{a}_m$ durch $\mathfrak{a}_s$ und die Matrix $\mathfrak{W}$ hat nicht mn, sondern sn Spalten. Sonst ändert sich an der ganzen Ableitung nichts.

Eine Anwendung der Gleichungen (6) möge für die Kopplungsmatrizen

$$\mathfrak{W} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_m \mathfrak{E}_n \\ \lambda_1 \mathfrak{E}_n & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathfrak{E}_n & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_{m-1} \mathfrak{E}_n & 0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}^* = \mathfrak{E}$$

($\mathfrak{E}_n$ n-reihige Einheitsmatrix)

gezeigt werden. Bei dieser Wahl von $\mathfrak{W}$ folgt aus $\mathfrak{d} = \mathfrak{W}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{W}^*\,\mathfrak{r}$ für $\lambda_i = 1$

$$\mathfrak{d}_i = \mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{r}_i$$

(unter zyklischer Auffassung der Folge $1, 2, \ldots m$, also mit $\mathfrak{a}_{1-1} = \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_m$).

Dieser Fall wurde in einer früheren Abhandlung[1] als Betriebskette mit Rückführung bezeichnet. Für $\lambda_i = 1$ $(i < m)$, $\lambda_m = 0$, kommt

$$\mathfrak{d}_i = \mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{r}_i\,, \qquad \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{r}_1\,, \qquad (1 < i \leq m)$$

ein Fall, der als unverzweigte Betriebskette[2] bezeichnet werden soll. Nun wird

$$\mathfrak{W}\,\mathfrak{U} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_m \mathfrak{E}_n \\ \lambda_1 \mathfrak{E}_n & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathfrak{E}_n & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_{m-1} \mathfrak{E}_n & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{U}_1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}_2 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \mathfrak{U}_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_m \mathfrak{U}_m \\ \lambda_1 \mathfrak{U}_1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathfrak{U}_2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_{m-1} \mathfrak{U}_{m-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werde vorübergehend $\mathfrak{U}_i$ an Stelle von $\lambda_i\,\mathfrak{U}_i$ gesetzt, ferner werden die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{U}_{ik} &= \mathfrak{U}_i\ \mathfrak{U}_{i-1} \ldots \mathfrak{U}_k \\ \mathfrak{V}_{ik} &= \mathfrak{V}_i\ \mathfrak{U}_{i-1} \\ \overline{\mathfrak{U}}_{kk} &= (\mathfrak{E}_n - \mathfrak{U}_{k-1,k})^{-1} \\ \mathfrak{V}_{kk} &= \mathfrak{V}_k \end{aligned}\right\} (i, k = 1, 2, \ldots m) \qquad (7)$$

unter zyklischer Auffassung der Folge $1, 2, \ldots m$ eingeführt.

Dann gilt die Gleichung:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \mathfrak{E}_n & 0 & \cdot & 0 & -\mathfrak{U}_m \\ -\mathfrak{U}_1 & \mathfrak{E}_n & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & -\mathfrak{U}_{m-1} & \mathfrak{E}_n \end{vmatrix}}_{(\mathfrak{E} - \mathfrak{W}\,\mathfrak{U})} \begin{vmatrix} \overline{\mathfrak{U}}_{11} & \mathfrak{U}_{m2}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \mathfrak{U}_{mm}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm} \\ \mathfrak{U}_{11}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11} & \overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \mathfrak{U}_{1m}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{U}_{m-1,1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11} & \mathfrak{U}_{m-1,2}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \overline{\mathfrak{U}}_{mm} \end{vmatrix} = \mathfrak{E}$$

($\mathfrak{E}$ mn-reihige Einheitsmatrix).

Beim Nachweis dieser Gleichung ist lediglich zu beachten, daß

Zeile i des Produktes = Zeile i des Rechtsfaktors $-\ \mathfrak{U}_{i-1} \cdot$ Zeile $(i-1)$ des Rechtsfaktors

ist. Somit gilt, wenn das Matrizenprodukt vorübergehend mit $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{Q}_{ik})$ bezeichnet wird,

für $i \neq k$: $\mathfrak{Q}_{ik} = \mathfrak{U}_{i-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk} - \mathfrak{U}_{i-1}\,(\mathfrak{U}_{i-2,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}) = \mathfrak{U}_{i-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk} - \mathfrak{U}_{i-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk} = 0$

für $i = k$: $\mathfrak{Q}_{ik} = \overline{\mathfrak{U}}_{kk} - \mathfrak{U}_{k-1}\,(\mathfrak{U}_{k-2,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}) = \overline{\mathfrak{U}}_{kk} - \mathfrak{U}_{k-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk} = (\mathfrak{E}_n - \mathfrak{U}_{k-1,k})\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}$
$= (\mathfrak{E}_n - \mathfrak{U}_{k-1,k})\,(\mathfrak{E}_n - \mathfrak{U}_{k-1,k})^{-1} = \mathfrak{E}_n\,.$

Damit ist gezeigt, daß der Rechtsfaktor in dem obigen Produkt die Kehrmatrix von $(\mathfrak{E} - \mathfrak{W}\,\mathfrak{U})$ darstellt. Für diese läßt sich somit schreiben, wenn man für $\mathfrak{U}_i$ nun wieder $\lambda_i\,\mathfrak{U}_i$ setzt und die

[1] I, Seite 125 ff.
[2] I, Seite 123 ff.

(zyklisch aufzufassenden) Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{ik} &= \lambda_i\,\lambda_{i-1}\ldots\lambda_k\,, \\ \lambda &= \prod_{i=1}^{m}\lambda_i = \lambda_{k-1,k}, \\ \overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) &= (\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{U}_{k-1,k})^{-1} \end{aligned}\right\}(i,\,k = 1,\,2,\ldots m) \tag{7b}$$

einführt,

$$(\mathfrak{E}-\mathfrak{W}\,\mathfrak{U})^{-1} = \left|\begin{array}{cccc} \overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \lambda_{m2}\,\mathfrak{U}_{m2}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \cdot & \lambda_{mm}\,\mathfrak{U}_{mm}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm}(\lambda) \\ \lambda_{11}\,\mathfrak{U}_{11}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \cdot & \lambda_{1m}\,\mathfrak{U}_{1m}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{m-1,1}\,\mathfrak{U}_{m-1,1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \lambda_{m-1,2}\,\mathfrak{U}_{m-1,2}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \cdot & \overline{\mathfrak{U}}_{mm}(\lambda) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right| \tag{8}$$

$$= (\delta_{ik}\,\mathfrak{E}_n + \lambda_{i-1,k}\,\mathfrak{U}_{i-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda)) \qquad \left(\begin{array}{ll}\delta_{ik} = 0 & \text{für } i \neq k \\ = 1 & \text{für } i = k\end{array}\right).$$

Dabei wurde für die letzte Umformung die Identität

$$\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) = \mathfrak{E}_n + \lambda_{k-1,k}\,\mathfrak{U}_{k-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) = \mathfrak{E}_n + \lambda_{k-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda)\,\mathfrak{U}_{k-1,k} \tag{9}$$

benutzt, die aus $\mathfrak{E}_n = \lambda\,\mathfrak{U}_{k-1,k} + (\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{U}_{k-1,k})$ folgt, wenn man beide Seiten von rechts bzw. von links mit $(\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{U}_{k-1,k})^{-1} = \overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda)$ multipliziert und berücksichtigt, daß gemäß (7b) $\lambda = \lambda_{k-1,k}$ ist. Setzt man noch $\mathfrak{W}^* = \mathfrak{E}$ und beschränkt sich im Interesse der einfacheren Schreibweise auf $m = 3$, so erhält man schließlich für den Betriebsablauf $\mathfrak{l}$ aus (6a) mit den weiteren Abkürzungen $\mathfrak{V}_{ik}$ gemäß (7)

$$\mathfrak{l} = \begin{pmatrix}\mathfrak{d}\\ \mathfrak{a}\\ \mathfrak{f}\end{pmatrix} = \left|\begin{array}{ccc} \overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \lambda_{32}\,\mathfrak{U}_{32}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \lambda_{33}\,\mathfrak{U}_{33}\,\overline{\mathfrak{U}}_{33}(\lambda) \\ \lambda_{11}\,\mathfrak{U}_{11}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \lambda_{13}\,\mathfrak{U}_{13}\,\overline{\mathfrak{V}}_{33}(\lambda) \\ \lambda_{21}\,\mathfrak{U}_{21}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \lambda_{22}\,\mathfrak{U}_{22}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \overline{\mathfrak{U}}_{33}(\lambda) \\ \mathfrak{U}_{11}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \lambda_{32}\,\mathfrak{U}_{12}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \lambda_{33}\,\mathfrak{U}_{13}\,\overline{\mathfrak{U}}_{33}(\lambda) \\ \lambda_{11}\,\mathfrak{U}_{21}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \mathfrak{U}_{22}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \lambda_{13}\,\mathfrak{U}_{23}\,\overline{\mathfrak{U}}_{32}(\lambda) \\ \lambda_{21}\,\mathfrak{U}_{31}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \lambda_{22}\,\mathfrak{U}_{32}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \mathfrak{U}_{33}\,\overline{\mathfrak{U}}_{33}(\lambda) \\ \mathfrak{V}_{11}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \lambda_{32}\,\mathfrak{V}_{12}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \lambda_{33}\,\mathfrak{V}_{13}\,\overline{\mathfrak{U}}_{33}(\lambda) \\ \lambda_{11}\,\mathfrak{V}_{21}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \mathfrak{V}_{22}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \lambda_{13}\,\mathfrak{V}_{23}\,\overline{\mathfrak{U}}_{33}(\lambda) \\ \lambda_{21}\,\mathfrak{V}_{31}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda) & \lambda_{22}\,\mathfrak{V}_{32}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22}(\lambda) & \mathfrak{V}_{33}\,\overline{\mathfrak{U}}_{33}(\lambda) \end{array}\right| \mathfrak{r}\,. \tag{10}$$

Unter Verwendung des Kroneckersymbols δ_{ik} läßt sich allgemein für eine Kette mit m Teilbetrieben schreiben

$$\mathfrak{l} = \begin{pmatrix}\mathfrak{d}\\ \mathfrak{a}\\ \mathfrak{f}\end{pmatrix} = \left|\begin{array}{ccc} \delta_{ik}\,\mathfrak{E}_n + \lambda_{i-1,k}\,\mathfrak{U}_{i-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) \\ \delta_{ik}\,\mathfrak{U}_i + \lambda_{i-1,k}\,\mathfrak{U}_{ik}\quad \overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) \\ \delta_{ik}\,\mathfrak{V}_i + \lambda_{i-1,k}\,\mathfrak{V}_{ik}\quad \overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) \end{array}\right| \mathfrak{r} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{r}\,. \tag{10a}$$

Für Zwischenproduktabgaben folgt aus (3) unter Vertauschung der Zeiger i und k

$$\mathfrak{z}_i = (1-\lambda_i)\,\mathfrak{a}_i\,. \tag{3a}$$

Man erkennt ferner, daß man aus (10) bzw. (10a) für $\lambda_i = 1$ die Betriebskette mit Rückführung[1] erhält (es wird dann $\mathfrak{z}_i = (1-\lambda_i)\,\mathfrak{a}_i = 0$), während mit $\lambda_i = 1$ für $i = 1, 2, \ldots m-1$, $\lambda_m = 0$ die Gleichungen für die unverzweigte Betriebskette[2] herauskommen. (Es wird dann $\mathfrak{z}_i = 0$ für $i = 1, 2, \ldots m-1$ und $\mathfrak{z}_m = \mathfrak{a}_m$). Bei dem Nachweis ist zu beachten, daß in diesem Fall, da $\lambda_m = 0$, sowohl

$$\lambda = \lambda_m\,\lambda_{m-1}\ldots\lambda_1 = 0 \quad \text{und damit} \quad \overline{\mathfrak{U}}_{kk} = (\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{U}_{k-1,k})^{-1} = \mathfrak{E}_n\,,$$

als auch für $i < k$

$$\lambda_{ik} = \lambda_i\,\lambda_{i-1}\ldots\lambda_1\,\lambda_m\,\lambda_{m-1}\ldots\lambda_k = 0 \quad \text{und damit auch} \quad \lambda_{ik}\,\mathfrak{U}_{ik} = 0$$

werden. Allgemein gilt, daß, wenn r Größen λ_i verschwinden, das Betriebssystem in r unverzweigte Betriebsketten zerfällt.

---

[1] Siehe S. 128.
[2] Siehe S. 124.

Für die Aufstellung der Lösungsmatrix $\mathfrak{Q}$ sind m reziproke, n-reihige Matrizen $\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda)$ zu berechnen; diese lassen sich, wie jetzt gezeigt werden soll, sämtlich auf eine von ihnen beispielsweise $\mathfrak{U}_{ii}(\lambda)$ zurückführen. Dazu wird die Identität

$$\mathfrak{A}\,(\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{A})^{-1} = (\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})^{-1}\,\mathfrak{A}$$

benötigt, die sich aus der Identität

$$(\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{A})$$

ergibt, indem man beide Seiten von links mit $(\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})^{-1}$ und von rechts mit $(\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{A})^{-1}$ multipliziert. Nun ist

$$\mathfrak{U}_{i-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) = \mathfrak{U}_{i-1,k}\,(\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{U}_{k-1,k})^{-1} = \mathfrak{U}_{i-1,k}\,(\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{U}_{k-1,i}\,\mathfrak{U}_{i-1,k})^{-1}$$

oder unter Benutzung der soeben gezeigten Identität

$$\mathfrak{U}_{i-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) = (\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{U}_{i-1,k}\,\mathfrak{U}_{k-1,i})^{-1}\,\mathfrak{U}_{i-1,k} = (\mathfrak{E}_n - \lambda\,\mathfrak{U}_{i-1,k})^{-1}\,\mathfrak{U}_{i-1,k}) = \overline{\mathfrak{U}}_{ii}(\lambda)\,\mathfrak{U}_{i-1,k}\,.$$

Somit gilt

$$\mathfrak{U}_{i-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) = \overline{\mathfrak{U}}_{ii}(\lambda)\,\mathfrak{U}_{i-1,k}\,. \tag{11}$$

Unter Benutzung von (9) und (7b) läßt sich weiter schreiben

$$\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) = \mathfrak{E}_n + \lambda\,\mathfrak{U}_{k-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) = \mathfrak{E}_n + \lambda\,\mathfrak{U}_{k-1,i}\,\mathfrak{U}_{i-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) = \mathfrak{E}_n + \lambda\,\mathfrak{U}_{k-1,i}\,\overline{\mathfrak{U}}_{ii}(\lambda)\,\mathfrak{U}_{i-1,k}\,. \tag{12}$$

Damit ist die Berechnung der Kehrmatrix $\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda)$ auf die von $\overline{\mathfrak{U}}_{ii}(\lambda)$ zurückgeführt; für $i = 1$ ergibt sich insbesondere

$$\overline{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda) = \mathfrak{E}_n + \lambda\,\mathfrak{U}_{k-1,1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda)\,\mathfrak{U}_{mk}\,. \tag{12a}$$

Es genügt somit, zur Aufstellung der Lösungsmatrix $\mathfrak{Q}$ in (10a) lediglich die Kehrmatrix $\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda)$ zu berechnen; die übrigen Elemente von $\mathfrak{Q}$ lassen sich dann, wie hier jedoch im einzelnen nicht weiter gezeigt werden soll, von $\overline{\mathfrak{U}}_{11}(\lambda)$ ausgehend durch je eine Matrizenmultiplikation errechnen.

3. Umformung der Matrizen für verschiedene Verwendungszwecke. Es wurde bis jetzt gezeigt, wie man, ausgehend von den Umsatzmatrizen $\mathfrak{U}_i$, die sich für die einzelnen Teilbetriebe eines Betriebssystems aufstellen lassen, auch den Betriebsablauf des ganzen Betriebssystems unter Berücksichtigung der Kopplungsbedingungen durch eine Matrix darstellen kann. Wenn eine solche Matrix nun auch einen weitgehenden Einblick in die Betriebsstruktur vermittelt, so ist sie doch in dieser Form für manche praktischen Aufgaben nicht zweckmäßig, weil sie einmal viele nicht weiter interessierende Einzelheiten bringt, andererseits aber auch aus ihr ableitbare Größen, die für die Beurteilung des Betriebsablaufes von Bedeutung sind, nicht unmittelbar enthält. Da nun die Brauchbarkeit der Matrizenrechnung zum Teil gerade darauf beruht, daß möglichst viele Rechnungen vorbereitend erledigt werden können, ist es notwendig, die bis jetzt erhaltenen Matrizen weiter umzuformen.

a) Bewertungen und Transformationen. Durch die Gleichungen (10) bzw. (10a) ist der Betriebsablauf, d. h. Durchsätze, Ausbeuten und Fertigprodukte, als lineare Vektorfunktion der Rohproduktvektoren $\mathfrak{r}_k$ gegeben. Nun ist es häufg so, daß diese, wenn es sich beispielsweise um Gase handelt, wohl hinsichtlich ihrer Menge, aber nicht oder nur in geringem Umfang hinsichtlich ihrer Zusammensetzung variiert werden können. Kann man nun mit einer festen Zusammensetzung rechnen, so ist es wünschenswert, diese mit in die Matrix hineinzunehmen. Zu diesem Zweck führt man eine „Bewertung" der Rohprodukte gemäß

$$R_k = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}k}\,\mathfrak{r}_k$$

ein, wo $\mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}k}$ einen Zeilenvektor, den „Bewertungsvektor", darstellt. Setzt man beispielsweise

$$\mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}k} = (1, 1, \ldots 1)\,,$$

so stellt, wenn $\mathfrak{r}_k$ etwa ein Gas mit n Komponenten bedeutet,

$$R_k = (1, 1, \ldots 1)\begin{pmatrix} r_{1k} \\ r_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{nk} \end{pmatrix} = r_{1k} + r_{2k} + \ldots r_{nk}$$

einfach die Menge des Gases $\mathfrak{r}_k$ (etwa in Nm^3) dar und man kann von einer „Mengenbewertung" sprechen, während durch

$$\mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}_k} = (0, 1, 1, \ldots 0)$$

eine „Auswahlbewertung" (etwa nach der CO + H_2-Menge, was bei der Wasserstofferzeugung gelegentlich zweckmäßig ist) dargestellt wird. Von einer „Bewertung nach dem Heizwert" kann man bei dem Bewertungsvektor

$$\mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}_k} = (h_1, h_2, \ldots h_n)$$

sprechen, wo $h_1, h_2, \ldots h_n$ die Heizwerte der einzelnen Gaskomponenten bedeuten. Schließlich kann man auch, z. B. bei wirtschaftlichen Rechnungen, eine gleichmäßige Bewertung nach DM einführen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß sich die hier eingeführte Bewertung nicht mit der sonst in der Mathematik üblichen deckt. Man kann nun weiter gemäß

$$\bar{\mathfrak{r}}_k = \frac{\mathfrak{r}_k}{R_k} = \begin{vmatrix} \frac{r_{1k}}{R_k} \\ \frac{r_{2k}}{R_k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{r_{nk}}{R_k} \end{vmatrix}$$

„normierte" Vektoren für die Rohprodukte einführen. Es gilt dann $\mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}_k}\,\bar{\mathfrak{r}}_k = 1$ und es lassen sich dann gemäß

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{r}_1 \\ \mathfrak{r}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{r}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{r}}_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \bar{\mathfrak{r}}_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \bar{\mathfrak{r}}_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ R_l \end{pmatrix} = \mathfrak{S} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ R_l \end{pmatrix} \tag{13}$$

die in die Vektorgleichung eingehenden Werte $\mathfrak{r}_k$ durch die Werte R_k mit Hilfe einer im allgemeinen nicht quadratischen Matrix $\mathfrak{S}$ ausdrücken. Bemerkt sei noch, daß man die Gleichung

$$\mathfrak{r}_k = \bar{\mathfrak{r}}_k\, R_k$$

auch als Umsatzgleichung auffassen kann, wenn man unter R_k etwa einen bestimmten Brennstoff versteht, der in einem bestimmten Betrieb zur Gaserzeugung eingesetzt wird. $\bar{\mathfrak{r}}_k$ bedeutet dann die aus der Gewichtseinheit dieses Brennstoffes unter den vorherrschenden Betriebsbedingungen gewinnbare Gasmenge (als n-dimensionaler Vektor aufgefaßt). Schließlich kann man auch noch die Matrix $\mathfrak{S}$ mit der Matrix $\mathfrak{W}^*$ für die Rohproduktverteilung (Abschnitt 2) verbinden, und erhält dann unter Erweiterung der Definition für $\mathfrak{S}$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{r}_1 \\ \mathfrak{r}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{r}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{W}^*_{11} & \mathfrak{W}^*_{12} & \cdot & \mathfrak{W}^*_{1l} \\ \mathfrak{W}^*_{21} & \mathfrak{W}^*_{22} & \cdot & \mathfrak{W}^*_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{W}^*_{m1} & \mathfrak{W}^*_{m2} & \cdot & \mathfrak{W}^*_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{r}}_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \bar{\mathfrak{r}}_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \bar{\mathfrak{r}}_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ R_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{r}_{11} & \mathfrak{r}_{12} & \cdot & \mathfrak{r}_{1l} \\ \mathfrak{r}_{21} & \mathfrak{r}_{22} & \cdot & \mathfrak{r}_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{r}_{m1} & \mathfrak{r}_{m2} & \cdot & \mathfrak{r}_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ R_l \end{pmatrix} = \mathfrak{S} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ R_l \end{pmatrix}, \tag{13a}$$

wo in $\mathfrak{S} = (\mathfrak{r}_{ik})$ die Elemente $\mathfrak{r}_{ik}$ Spaltenvektoren

$$\mathfrak{r}_{ik} = \begin{vmatrix} \frac{w^*_{1k}\, r_{1k}}{R_k} \\ \frac{w^*_{1k}\, r_{2k}}{R_k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{w^*_{1k}\, r_{nk}}{R_k} \end{vmatrix}$$

bedeuten. Auch für die den Betriebsablauf zum Ausdruck bringenden Vektoren $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{f}$ empfiehlt es sich vielfach, gemäß

$$D_i = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{d}_i}\, \mathfrak{d}_i\,, \qquad A_i = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_i}\, \mathfrak{a}_i\,, \qquad F_i = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{f}_i}\, \mathfrak{f}_i$$

Bewertungen einzuführen. Dann wird •

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ \cdot \\ D_m \\ A_1 \\ \cdot \\ A_m \\ F_1 \\ \cdot \\ F_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{b}'_{b_1} & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \mathfrak{b}'_{b_m} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \mathfrak{b}'_{a_1} & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \mathfrak{b}'_{a_m} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \mathfrak{b}'_{f_1} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \mathfrak{b}'_{f_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{d}_1 \\ \cdot \\ \mathfrak{d}_m \\ \mathfrak{a}_1 \\ \cdot \\ \mathfrak{a}_m \\ \mathfrak{f}_1 \\ \cdot \\ \mathfrak{f}_m \end{pmatrix} = \mathfrak{T} \begin{pmatrix} \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a} \\ \mathfrak{f} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Es kann vorkommen, daß für eine Größe, etwa $\mathfrak{d}_i$, mehr als eine Bewertung benötigt wird; dann setzt man, beispielsweise bei zwei Bewertungen, an Stelle von

$$D_i = \mathfrak{b}'_{b_i}\,\mathfrak{d}_i$$

einfach

$$\begin{pmatrix} D_i^{\bullet} \\ D_i^{\bullet\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{b}_{b_i}^{\bullet\prime} \\ \mathfrak{b}_{b_i}^{\bullet\bullet\prime} \end{pmatrix} \mathfrak{d}_i = \mathfrak{B}_{b_i}\,\mathfrak{d}_i$$

und erweitert damit die Matrix $\mathfrak{T}$ hinsichtlich der Zeilenzahl.

Schreibt man die Vektorgleichung (10a), welche den Betriebsablauf in Abhängigkeit vom Rohstoffeinsatz zum Ausdruck bringt, kurz

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{x}$$

und den Übergang auf die Bewertungen durch die „Transformationsgleichungen"

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{S}\,\bar{\mathfrak{x}} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{y}\,,$$

so wird

$$\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{S}\,\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{P}\,\bar{\mathfrak{x}}\,.$$

Geht man von der Vorstellung aus, daß durch die Transformationsgleichungen der Rohstoffeinsatz $\mathfrak{x}$ bzw. der Betriebsablauf $\mathfrak{y}$ auf andere „Koordinatensysteme" mit im allgemeinen verringerten Dimensionszahlen bezogen werden, so kann man den Übergang von der Matrix $\mathfrak{Q}$ zur Matrix $\mathfrak{P}$ gemäß

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{S}$$

in verallgemeinertem Sinne als Transformation mit den „Bewertungsmatrizen" $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ bezeichnen. Hierbei sind allerdings im allgemeinen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ singulär; die Matrix $\mathfrak{Q}$ schrumpft bei der Transformation auf die Matrix $\mathfrak{P}$ zusammen. Diese enthält zwar nicht mehr so viele Einzelheiten wie $\mathfrak{Q}$, sie beschränkt sich vielmehr auf die für die Betriebsbeurteilung wesentlichen Größen und ist für die praktische Zahlenrechnung bequemer zu handhaben. Auch hier zeigt sich wieder, wie zwanglos sich der Matrizenkalkül auf die Untersuchung von Betriebsvorgängen anwenden läßt.

In den Tabellen 1 und 2 ist die Transformation der in einer früheren Abhandlung[1] gebrachten Matrizen gezeigt. Dabei wurden folgende Gasanalysen zugrundegelegt[2]:

	Einsatz in	Volumteile				
		CO_2	CO	H_2	N_2	CH_4
Wassergas aus Koks	Konvertierung	0,07	0,40	0,50	0,025	0,005
Wassergas aus Grude	Konvertierung	0,22	0,34	0,40	0,025	0,015
Abgas aus einem anderen Betriebssystem	Druckwasserwäsche	0,30	0,07	0,60	0,02	0,01

Die gewählten Bewertungen sind aus der Tabelle selbst ersichtlich.

b) Umkehrproblem. Durch die (unter Umständen durch eine Bewertungstransformation abgewandelte) Gleichung (10a), ist der Betriebsablauf $\mathfrak{l}$ als Funktion der zum Einsatz gelangenden Rohprodukte $\mathfrak{r}$ dargestellt gemäß

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{r}\,.$$

[1] I, Tabelle 2 u. 3.

[2] Siehe etwa *Krönig*, Die katalytische Druckhydrierung von Kohlen, Teeren und Mineralölen, S. 184, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.

Tabelle 1. *Transformierte Matrizen.*
Matrix $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{S}$

		Unverzweigte Betriebskette			Betriebskette mit Rückführung		
		Wassergas aus Koks R_1	Wassergas aus Grude R_2	Abfallgas R_3	Wassergas aus Koks R_1	Wassergas aus Grude R_2	Abfallgas R_3
		Nm³ $CO + H_2$	Nm³ $CO + H_2$	Nm³ $CO + H_2$	Nm³ $CO + H_2$	Nm³ $CO + H_2$	Nm³ $CO + H_2$
Durchsatz der Konvertierung	CO_2	0,0778	0,2973	—	0,0987	0,3186	0,0222
	CO	0,4444	0,4594	—	0,4953	0,5103	0,1053
$\mathfrak{d}_1$	H_2	0,5556	0,5406	—	0,5753	0,5603	0,0197
(Nm³)	N_2	0,0278	0,0338	—	0,0284	0,0345	0,0006
	CH_4	0,0055	0,0203	—	0,0059	0,0217	0,0010
Durchsatz der Druckwasserwäsche	CO_2	0,4722	0,7067	0,4478	0,5405	0,7754	0,5691
	CO	0,0500	0,0500	0,1045	0,0535	0,0535	0,1108
$\mathfrak{d}_2$	H_2	0,9500	0,9500	0,8955	1,0171	1,0171	1,0142
(Nm³)	N_2	0,0278	0,0338	0,0298	0,0284	0,0345	0,0304
	CH_4	0,0055	0,0203	0,0149	0,0059	0,0217	0,0159
Durchsatz der Kupferwäsche	CO_2	0,0200	0,0204	0,0202	0,0215	0,0219	0,0227
	CO	0,0485	0,0485	0,1014	0,0519	0,0519	0,1074
$\mathfrak{d}_3$	H_2	0,9215	0,9215	0,8686	0,9866	0,9866	0,9837
(Nm³)	N_2	0,0270	0,0328	0,0289	0,0275	0,0334	0,0295
	CH_4	0,0050	0,0183	0,0134	0,0053	0,0195	0,0143
Ausbeute der Konvertierung	CO_2	0,4722	0,7067	—	0,5405	0,7754	0,1213
	CO	0,0500	0,0500	—	0,0535	0,0535	0,0963
$\mathfrak{a}_1$	H_2	0,9500	0,9500	—	1,0171	1,0171	0,1187
(Nm³)	N_2	0,0278	0,0338	—	0,0284	0,0345	0,0006
	CH_4	0,0055	0,0203	—	0,0059	0,0217	0,0010
Ausbeute der Druckwasserwäsche	CO_2	0,0200	0,0204	0,0202	0,0215	0,0219	0,0227
	CO	0,0485	0,0485	0,1014	0,0519	0,0519	0,1074
$\mathfrak{a}_2$	H_2	0,9215	0,9215	0,8686	0,9866	0,9866	0,9837
(Nm³)	N_2	0,0270	0,0328	0,0289	0,0275	0,0334	0,0295
	CH_4	0,0050	0,0183	0,0134	0,0053	0,0195	0,0143
CO-Rückgas	CO_2	0,0196	0,0200	0,0198	0,0209	0,0213	0,0222
	CO	0,0475	0,0475	0,0993	0,0509	0,0509	0,1053
$\mathfrak{f}_3$	H_2	0,0184	0,0184	0,0174	0,0197	0,0197	0,0197
(Nm³)	N_2	0,0005	0,0007	0,0006	0,0006	0,0007	0,0006
	CH_4	0,0003	0,0013	0,0009	0,0004	0,0014	0,0010
Ausgewaschene Kohlensäure	CO_2	0,3577	0,5449	0,3380	0,4110	0,5985	0,4326
	CO	0,0015	0,0015	0,0031	0,0016	0,0016	0,0033
$\mathfrak{f}_2$	H_2	0,0285	0,0285	0,0269	0,0305	0,0305	0,0304
(Nm³)	N_2	0,0008	0,0010	0,0009	0,0009	0,0010	0,0009
	CH_4	0,0006	0,0020	0,0015	0,0006	0,0022	0,0016
Frischgas	CO_2	—	—	—	—	—	—
	CO	—	—	—	—	—	—
$\mathfrak{f}_1$	H_2	0,8939	0,8939	0,8426	0,9570	0,9570	0,9543
(Nm³)	N_2	0,0262	0,0318	0,0280	0,0267	0,0324	0,0286
	CH_4	0,0046	0,0168	0,0123	0,0049	0,0179	0,0132

Bei den praktisch auftretenden Betriebsaufgaben lautet die Fragestellung nun meist so, daß etwa die (im Betriebsablauf $\mathfrak{l}$ enthaltenen) Fertigprodukte $\mathfrak{f}$ vorgegeben sind und die dafür notwendigen Rohprodukte $\mathfrak{r}$ und Betriebsbelastungen $\mathfrak{d}$ ermittelt werden sollen. Für die Beantwortung dieser Frage ist der Rang der Matrix $\mathfrak{Q}$, der höchstens gleich der Anzahl der Komponenten von $\mathfrak{r}$ sein kann, entscheidend. Für die Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}$, sowie für die Matrix $\mathfrak{Q}$ werde nun, u. U. nach geeigneter Umordnung von Zeilen und Spalten, gemäß

$$\mathfrak{l} = \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{l}} \\ \bar{\bar{\mathfrak{l}}} \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{r} = \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{r}} \\ \bar{\bar{\mathfrak{r}}} \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{11}\,\mathfrak{Q}_{12} \\ \mathfrak{Q}_{21}\,\mathfrak{Q}_{22} \end{pmatrix}$$

eine Aufspaltung derart vorgenommen, daß die Zahl der Komponenten von $\bar{\mathfrak{l}}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$, sowie der Rang von $\mathfrak{Q}_{11}$ gerade gleich dem Rang von $\mathfrak{Q}$ sind, und daß die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{l}} \\ \bar{\bar{\mathfrak{l}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{11}\,\mathfrak{Q}_{12} \\ \mathfrak{Q}_{21}\,\mathfrak{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{r}} \\ \bar{\bar{\mathfrak{r}}} \end{pmatrix}$$

oder ausführlicher geschrieben

$$\bar{\mathfrak{l}} = \mathfrak{Q}_{11}\,\bar{\mathfrak{r}} + \mathfrak{Q}_{12}\,\bar{\bar{\mathfrak{r}}}\,,$$
$$\bar{\bar{\mathfrak{l}}} = \mathfrak{Q}_{21}\,\bar{\mathfrak{r}} + \mathfrak{Q}_{22}\,\bar{\bar{\mathfrak{r}}}$$

gilt. Daraus erhält man durch eine einfache Zwischenrechnung:

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{r}} \\ \bar{\mathfrak{l}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{11}^{-1} & -\mathfrak{Q}_{11}^{-1}\,\mathfrak{Q}_{12} \\ \mathfrak{Q}_{21}\,\mathfrak{Q}_{11}^{-1} & \mathfrak{Q}_{22} - \mathfrak{Q}_{21}\,\mathfrak{Q}_{11}^{-1}\,\mathfrak{Q}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{l}} \\ \bar{\bar{\mathfrak{r}}} \end{pmatrix} = \mathfrak{P} \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{l}} \\ \bar{\bar{\mathfrak{r}}} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Tabelle 2. *Transformierte Matrizen.*
Matrix $\mathfrak{P} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{S}$

				Unverzweigte Betriebskette			Betriebskette mit Rückführung		
				Wassergas aus Koks R_1	Wassergas aus Grude R_2	Abfallgas R_3	Wassergas aus Koks R_1	Wassergas aus Grude R_2	Abfallgas R_3
				Nm^3 $CO + H_2$	Nm^3 $CO + H_2$	Nm^3 $CO + H_2$	Nm^3 $CO + H_2$	Nm^3 $CO + H_2$	Nm^3 $CO + H_2$
Durchsatz der Konvertierung	D_1* [1]	$\bar{\mathfrak{d}}$	Nm^3	1,1111	1,3514	—	1,2036	1,4454	0,1488
Durchsatz der Druckwasserwäsche	D_2*		Nm^3	1,5055	1,7608	1,4925	1,6454	1,9022	1,7403
Durchsatz der Kupferwäsche	D_3*		Nm^3	1,0220	1,0415	1,0325	1,0928	1,1133	1,1576
Durchsatz der Konvertierung	D_1**		Nm^3CO+H_2	1,0000	1,0000	—	1,0706	1,0706	0,1250
Durchsatz der Druckwasserwäsche	D_2**		Nm^3CO+H_2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0706	1,0706	1,1250
Durchsatz der Kupferwäsche	D_3**		Nm^3CO+H_2	0,9700	0,9700	0,9700	1,0385	1,0385	1,0911
Ausbeute der Konvertierung	A_1**	$\bar{\mathfrak{a}}$	Nm^3CO+H_2	1,0000	1,0000	—	1,0706	1,0706	0,1250
Ausbeute der Druckwasserwäsche	A_2**		Nm^3CO+H_2	0,9700	0,9700	0,9700	1,0385	1,0385	1,0911
CO-Rückgas	A_3**		Nm^3CO+H_2	0,0659	0,0659	0,1167	0,0706	0,0706	0,1250
CO-Rückgas	A_3***		10^3 WE	0,1932	0,2018	0,3521	0,2077	0,2163	0,3770
Ausgewaschene Kohlensäure	F_1*	$\bar{\mathfrak{f}}$	Nm^3	0,3877	0,5779	0,3704	0,4446	0,6338	0,4688
Frischgas	F_2**		Nm^3CO+H_2	0,8939	0,8939	0,8426	0,9570	0,9570	0,9543

Matrix $\mathfrak{S}$

	R_1	R_2	R_3
	0,0778	0,2973	—
	0,4444	0,4594	—
$\bar{\mathfrak{r}}_1$	0,5556	0,5406	—
	0,0278	0,0338	—
	0,0055	0,0203	—
	—	—	0,4478
	—	—	0,1045
$\bar{\mathfrak{r}}_2$	—	—	0,8955
	—	—	0,0298
	—	—	0,0149

Bewertungsvektoren

	CO_2	CO	H_2	N_2	CH_4
Für Nm^3	1	1	1	1	1
„ Nm^3CO+H_2	0	1	1	0	0
„ 10^3 WE	0	3,017	2,574	0	8,574

[1] Zur Bezeichnung D_1* usw. s. S. 163.

wo $\mathfrak{Q}_{11}^{-1}$ existiert, sofern der Rang von $\mathfrak{Q} > 0$ ist. Mit dieser Gleichung können die aus dem Vektor $\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{l}}\\ \bar{\bar{\mathfrak{r}}}\end{pmatrix}$, der vorgegeben werden kann, folgenden Komponenten des Betriebsablaufes, zusammengefaßt in dem Vektor $\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{r}}\\ \bar{\bar{\mathfrak{l}}}\end{pmatrix}$, berechnet werden. Für den praktischen Gebrauch ist es nun wünschenswert, in dem auf der linken Seite stehenden Vektor sämtliche Rohstoffe, Durchsätze und Fertigprodukte zusammenzufassen, also auch diejenigen Komponenten des Betriebsablaufes, die auf der rechten Seite stehen und vorgegeben werden können. Man erreicht dies in einfacher Weise dadurch, daß man für diese Komponenten in die Matrix $\bar{\mathfrak{P}}$ Zeilen einschiebt, die an dem Schnittpunkt mit der entsprechenden Komponentenspalte eine 1, sonst aber als Elemente 0 haben. Die so erweiterte Matrix werde mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Es ist ferner zweckmäßig, in dem rechts stehenden Vektor $\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{l}}\\ \bar{\bar{\mathfrak{r}}}\end{pmatrix}$ die Fertigprodukte $\bar{\mathfrak{f}}$, soweit sie vorgegeben werden können, besonders herauszustellen und die übrigen Komponenten als betrieblich gegebene Nebenbedingungen zu einem Vektor $\mathfrak{n}$ zusammenzufassen, so daß also

$$\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{l}}\\ \bar{\bar{\mathfrak{r}}}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{f}}\\ \mathfrak{n}\end{pmatrix}$$

gilt. Dann läßt sich der Betriebsablauf eines ganzen Betriebssystems (jetzt in abgeänderter Form) dargestellt durch den „Betriebsvektor“

$$\mathfrak{l} = \begin{pmatrix}\mathfrak{r}\\ \mathfrak{d}\\ \mathfrak{f}\end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von dem Produktionsprogramm, dargestellt durch den „Produktionsvektor“

$\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{f}}\\ \mathfrak{n}\end{pmatrix}$ durch

$$\mathfrak{l} = \begin{pmatrix}\mathfrak{r}\\ \mathfrak{d}\\ \mathfrak{f}\end{pmatrix} = \mathfrak{P}\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{f}}\\ \mathfrak{n}\end{pmatrix} \tag{16}$$

wiedergeben.

Durch die oben erwähnte Ranguntersuchung der Matrix $\mathfrak{Q}$, die in der Matrix $\mathfrak{P}$ ihren Niederschlag findet, wird die Struktur eines Werkes, d. h. eines Betriebssystemes, weitgehend analysiert. Die Matrix $\mathfrak{P}$ möge daher auch als „Strukturmatrix" bezeichnet werden. Wesentlich ist, daß die Auswahl der Vektoren $\bar{\mathfrak{f}}$ und $\mathfrak{n}$, und damit auch die Matrix $\mathfrak{P}$ im allgemeinen nicht eindeutig sind. Für die Auswahl der verschiedenen Möglichkeiten spielen Kapazitätsbetrachtungen und wirtschaftliche Überlegungen eine Rolle[1]. Zuweilen ist es notwendig, für mehrere mögliche Fälle Strukturmatrizen aufzustellen, um die verschiedensten, praktisch auftretenden Fragen rasch beantworten zu können. Bei der Durchführung der damit verbundenen numerischen Aufgaben hat sich bei umfangreichen Matrizen eine Aufspaltung in kleinere Matrizen als zweckmäßig erwiesen[2].

c) Umkehrproblem bei Zwischenproduktentnahme. Das Umkehrproblem, d. h. der Übergang von der Darstellung $\mathfrak{l} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{r}$ auf die Darstellung $\mathfrak{l} = \mathfrak{P}\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{f}}\\ \mathfrak{n}\end{pmatrix}$, läßt sich ohne weiteres lösen, sobald die Matrix $\mathfrak{Q}$ mit allen ihren Elementen gegeben ist. Nun treten bei konformen Kopplungsbedingungen in der Matrix $\mathfrak{P}$ die Elemente der Verteilungsmatrix $\mathfrak{W}$ (s. Abschnitt 2) auf und es gibt sehr häufig Fälle, wo diese Matrix nicht von vornherein bekannt ist. Die dabei auftretenden Fragen sollen zunächst an einem einfachen Beispiel, der „Betriebskette mit teilweiser Rückführung" näher erläutert werden. Es kommt vor, daß die Ausbeute der letzten Stufe einer Betriebskette (etwa das CO-Rückgas bei der Wasserstoffherstellung[3]) nur teilweise zurückgeführt wird, da ein bestimmter Teil dieser Ausbeute an anderer Stelle benötigt wird, oder aber der Singularität von $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})$ begegnet werden soll[4]. In dem in Abb. 2 gezeichneten Beispiel mit drei Betrieben werde von der Ausbeute $\mathfrak{a}_3$ nur der Anteil $\lambda_3\mathfrak{a}_3$ zurückgeführt, während der Anteil

$$\mathfrak{z}_{\delta 3} = (1 - \lambda_3)\mathfrak{a}_3$$

anderweitig als „Zwischenproduktentnahme" verwendet werde. (Durch die für den Ansatz von $\mathfrak{z}_{\delta 3}$ gewählte Form kommt zum Ausdruck, daß $\mathfrak{z}_{\delta 3}$ dieselbe Zusammensetzung wie $\mathfrak{a}_3$ haben muß.) Die Rechnung geht genauso wie bei der Betriebskette mit Rückführung[5] vor sich und man hat zunächst

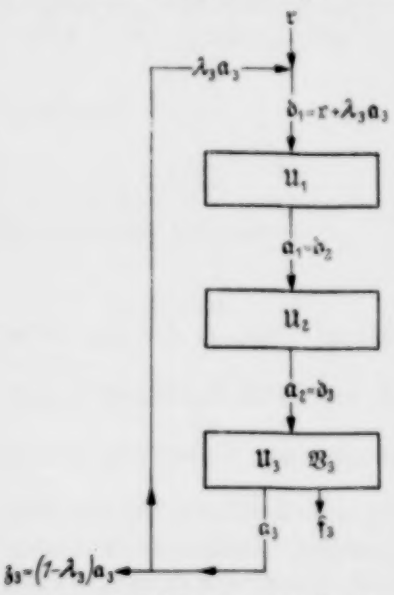

Abb. 2. Betriebskette mit teilweiser Rückführung.

$$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{U}_{31}\,\mathfrak{d}_1\,.$$

Für den Durchsatz $\mathfrak{d}_1$ gilt aber:

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{r} + \lambda_3\,\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{r} + \lambda_3\,\mathfrak{U}_{31}\,\mathfrak{d}_1\,,$$

oder

$$(\mathfrak{E} - \lambda_3\,\mathfrak{U}_{31})\,\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{r}$$

und weiter

$$\mathfrak{d}_1 = (\mathfrak{E} - \lambda_3\,\mathfrak{U}_{31})^{-1}\,\mathfrak{r}\,.$$

Für $\mathfrak{f}_3$ ergibt sich damit

$$\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{V}_{31}\,(\mathfrak{E} - \lambda_3\,\mathfrak{U}_{31})^{-1}\,\mathfrak{r} \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{V}_{31} = \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{U}_{21}\,,$$

während für die Zwischenproduktentnahme $\mathfrak{z}_{\delta 3}$ folgt

$$\mathfrak{z}_{\delta 3} = (1 - \lambda_3)\,\mathfrak{U}_{31}\,(\mathfrak{E} - \lambda_3\,\mathfrak{U}_{31})^{-1}\,\mathfrak{r}\,. \tag{17}$$

---

[1] I. Seite 135.
[2] Vgl. etwa *H. Unger*, Z. angew. Math. Mech. 32 (1952), S. 1.
[3] Siehe I. S. 119.
[4] Siehe I. S. 128.
[5] Die folgenden Gleichungen ergeben sich aus der ersten Spalte der Matrix (10) für $\lambda_{11} = \lambda_{21} = 1$ und $\lambda = \lambda_3$; vgl. auch I, S. 125.

Für $\lambda_3 = 0$ bzw. 1 ergeben sich die unverzweigte Betriebskette, bzw. die Betriebskette mit Rücklauf. Praktisch ist es nun meist so, daß λ_3 nicht vorgegeben ist, sondern etwa die Gesamtmenge von $\mathfrak{z}_{\delta 3}$ oder sonst ein mit $\mathfrak{z}_{\delta 3}$ zusammenhängender Skalar Z_3. Führt man durch $\mathfrak{b}'_{\delta_3}$ eine Bewertung ein, so ergibt sich für λ_3 die skalare Bestimmungsgleichung

$$Z_3 = \mathfrak{b}'_{\delta_3}\, \mathfrak{z}_{\delta 3} = (1 - \lambda_3)\, \mathfrak{b}'_{\delta_3}\, \mathfrak{U}_{31}\, (\mathfrak{E} - \lambda_3\, \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, \mathfrak{r}\,, \tag{18}$$

eine Gleichung, die im allgemeinen nicht mehr linear ist. Für die Vorgabe von Z_3 gilt dabei die einschränkende Bedingung, daß sich für λ_3 eine zwischen 0 und 1 liegende Lösung, die Grenzen mit eingeschlossen, ergeben muß, wenn die Zwischenproduktentnahme Z_3 realisierbar sein soll. So wird man bei Problemen dieser Art, ähnlich wie bei Eigenwertproblemen, auf nicht lineare Gleichungen geführt, deren Lösung vor allem dann, wenn auch noch an anderen Stellen Zwischenprodukte entnommen werden, sehr mühsam werden kann.

Der Unterschied gegenüber dem Eigenwertproblem liegt darin, daß bei diesem die charakteristische Gleichung über die charakteristische Determinante gewonnen wird, während man beim Zwischenproduktproblem die Skalargleichung für λ durch Multiplikation mit einem Bewertungsvektor $\mathfrak{b}'_\delta$ erhält. Dieser Unterschied tritt bei vektorieller Darstellung noch deutlicher zu Tage. Setzt man in eine Betriebskette mit Rückführung an Stelle des Rohproduktvektors $\mathfrak{r}$ den Vektor $(\mathfrak{r} - \mathfrak{z}_{\delta 3})$ ein, so gilt (für $m = 3$)

$$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{U}_{31}\, (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, (\mathfrak{r} - \mathfrak{z}_{\delta 3}) = \mathfrak{P}\, (\mathfrak{r} - \mathfrak{z}_{\delta 3})\,. \tag{19}$$

Soll $\mathfrak{z}_{\delta 3}$ nun ein von $\mathfrak{a}_3$ abgezweigtes Zwischenprodukt sein, so muß

$$\mathfrak{z}_{\delta 3} = (1 - \lambda_3)\, \mathfrak{a}_3$$

sein, wobei λ_3 durch $Z_3 = \mathfrak{b}'_{\delta_3}\, \mathfrak{z}_{\delta 3}$ festgelegt wird. Setzt man

$$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a} \qquad \text{und} \qquad (1 - \lambda_3) = -\lambda\,,$$

so wird aus (19)

$$\mathfrak{a} = \lambda\, \mathfrak{P}\, \mathfrak{a} + \mathfrak{P}\, \mathfrak{r}\,,$$

eine Gleichung, die für den hier bedeutungslosen Fall, daß $\mathfrak{r} = 0$ ist, in die Eigenwertgleichung

$$\mathfrak{a} = \lambda\, \mathfrak{P}\, \mathfrak{a}$$

mit dem Eigenwert λ übergeht.[1] Daß aus Gleichung (19) und $\mathfrak{z}_{\delta 3} = (1 - \lambda_3)\mathfrak{a}_3$ die Gleichung (17) folgt, läßt sich auch rein formal, wie folgt, sehen.

Zunächst läßt sich für (19) unter Berücksichtigung der genauso wie Gleichung (9) nachzuweisenden Identität

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1} = \mathfrak{E} + \mathfrak{U}_{31}\, (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1} = \mathfrak{E} + (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, \mathfrak{U}_{31}$$

schreiben

$$\mathfrak{a}_3 = (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, \mathfrak{U}_{31}\, (\mathfrak{r} - (1 - \lambda_3)\, \mathfrak{a}_3)\,.$$

Daraus folgt

$$[\mathfrak{E} + (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, \mathfrak{U}_{31} - \lambda_3\, (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, \mathfrak{U}_{31}]\, \mathfrak{a}_3 = (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, \mathfrak{U}_{31}\, \mathfrak{r}$$

oder unter Berücksichtigung, daß gemäß der oben gebrachten Identität

$$\mathfrak{E} + (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, \mathfrak{U}_{31} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}$$

ist,

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, (\mathfrak{E} - \lambda_3\, \mathfrak{U}_{31})\, \mathfrak{a}_3 = (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, \mathfrak{U}_{31}\, \mathfrak{r}\,.$$

Daraus folgt aber

$$\mathfrak{a}_3 = (\mathfrak{E} - \lambda_3\, \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, \mathfrak{U}_{31}\, \mathfrak{r} = \mathfrak{U}_{31}\, (\mathfrak{E} - \lambda_3\, \mathfrak{U}_{31})^{-1}\, \mathfrak{r}\,, \tag{17}$$

und dies ist, da $\mathfrak{z}_{\delta 3} = (1 - \lambda_3)\, \mathfrak{a}_3$, gleichbedeutend mit Gleichung (17).

Zur Behandlung des allgemeineren Falles einer Betriebskette mit Rohprodukteinsatz und Zwischenproduktentnahme an jeder Stelle werde von den Gleichungen (10a) ausgegangen und gemäß

$$R_i = \mathfrak{b}'_{r_i}\, \mathfrak{r}_i\,, \quad D_i = \mathfrak{b}'_{b_i}\, \mathfrak{d}_i\,, \quad A_i = \mathfrak{b}'_{a_i}\, \mathfrak{a}_i \qquad \text{und} \qquad F_i = \mathfrak{b}'_{f_i}\, \mathfrak{f}_i$$

bewertet.

---

[1] Es sei in diesem Zusammenhang jedoch darauf hingewiesen, daß die Behandlung von Anfahr- und Abstellvorgängen bei chemischen Betrieben auf Eigenwertprobleme führen kann.

Mit den normierten Vektoren

$$\bar{\mathfrak{r}}_k = \frac{\mathfrak{r}_k}{R_k} = \frac{\mathfrak{r}_k}{\mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}_k}\,\mathfrak{r}_k}\,,$$

den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} d_{ik}(\lambda) &= \mathfrak{b}'_{\mathfrak{d}_i}\,\mathfrak{U}_{i-1,k}\;\bar{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda)\,\bar{\mathfrak{r}}_k \quad \text{für} \quad k \neq i\,, \quad d_{ii} = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{d}_i}\,\bar{\mathfrak{U}}_{ii}(\lambda)\,\bar{\mathfrak{r}}_k\,,\\ a_{ik}(\lambda) &= \mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_i}\,\mathfrak{U}_{ik}\;\;\bar{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda)\,\bar{\mathfrak{r}}_k \qquad\quad (i,k = 1,2,\ldots m)\,,\\ f_{ik}(\lambda) &= \mathfrak{b}'_{\mathfrak{f}_i}\,\mathfrak{B}_{ik}\;\;\bar{\mathfrak{U}}_{kk}(\lambda)\,\bar{\mathfrak{r}}_k \qquad\quad (i,k = 1,2,\ldots m)\,, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

und weiter mit

$$\bar{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix} R_1\\ R_2\\ \cdot\\ R_m \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathfrak{d}} = \begin{pmatrix} D_1\\ D_2\\ \cdot\\ D_m \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ \cdot\\ A_m \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathfrak{f}} = \begin{pmatrix} F_1\\ F_2\\ \cdot\\ F_m \end{pmatrix}$$

folgt aus den Gleichungen (10a)

$$\bar{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \lambda_{m2}\,a_{12}(\lambda) & \cdot & \lambda_{mm}\,a_{1m}(\lambda)\\ \lambda_{11}\,a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdot & \lambda_{12}\,a_{2m}(\lambda)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_{m-1,1}\,a_{m1}(\lambda) & \lambda_{m-1,2}\,a_{m2}(\lambda) & \cdot & a_{mm}(\lambda) \end{pmatrix} \bar{\mathfrak{r}}\,. \tag{21}$$

Wenn man $a_{ik}(\lambda)$ durch $d_{ik}(\lambda)$ bzw. $f_{ik}(\lambda)$ ersetzt, ergeben sich ganz analoge Gleichungen für $\bar{\mathfrak{d}}$ und $\bar{\mathfrak{f}}$. Für $\lambda_m = \lambda = 0$ kommen die Matrizen für die unverzweigte Betriebskette mit den Elementen $d_{ik}(0)$, $a_{ik}(0)$ und $f_{ik}(0)$, während aus $\lambda_i = \lambda = 1$ die Betriebskette mit (vollkommener) Rückführung und den Matrizenelementen $d_{ik}(1)$, $a_{ik}(1)$ und $f_{ik}(1)$ folgt (siehe Zahlenbeispiel in Tabelle 2). Wendet man für die Normierung von $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{d}_i$ und $\mathfrak{a}_i$ dieselben Bewertungen

$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}_i} = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{d}_i} = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_i}$$

an, so erkennt man unmittelbar aus den Definitionsgleichungen für $d_{ik}(\lambda)$ und $a_{ik}(\lambda)$, daß dann

$$d_{ik}(\lambda) = a_{i-1,k}(\lambda) \quad \text{für} \quad i \neq k \quad \text{ist}\,,$$

während für $i = k$ unter Benutzung der Gleichung (12)

$$\begin{aligned} d_{ii}(\lambda) = \mathfrak{b}'\,\bar{\mathfrak{U}}_{ii}(\lambda)\,\bar{\mathfrak{r}}_i &= \mathfrak{b}'\,(\mathfrak{E} + \lambda\,\mathfrak{U}_{i-1,i}\,\bar{\mathfrak{U}}_{ii}(\lambda))\,\bar{\mathfrak{r}}_i\\ &= \mathfrak{b}'\,\mathfrak{E}\,\bar{\mathfrak{r}}_i + \lambda\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{U}_{i-1,i}\,\bar{\mathfrak{U}}_{ii}(\lambda)\,\bar{\mathfrak{r}}_i\\ &= 1 + \lambda\,a_{i-1,i}\\ &= 1 + \lambda_{i-1,i}\,a_{i-1,i} \end{aligned}$$

folgt. Diese Beziehungen sind eine Folge der Kopplungsbedingungen (s. Abschnitt 2)

$$\mathfrak{d}_i = \lambda_{i-1}\,\mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{r}_i\,,$$

die sich bei überall gleicher Bewertung in

$$D_i = \lambda_{i-1}\,A_{i-1} + R_i$$

abwandeln. Führt man auch für die von den Ausbeuten $\mathfrak{a}_i$ abgezweigten Zwischenprodukte $\mathfrak{z}_i$ die Bewertungen

$$\mathfrak{b}'_{\mathfrak{z}i} = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}i}$$

ein, so folgt aus $\mathfrak{z}_i = (1-\lambda_i)\,\mathfrak{a}_i$
$Z_i = (1-\lambda_i)\,A_i\,,$

und damit erhält man bei vorgegebenen Zwischenproduktentnahmen Z_i für λ_i aus (21) m Bestimmungsgleichungen

$$A_i = \frac{Z_i}{1-\lambda_i} = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{m} \lambda_{i-1,k}\,a_{ik}(\lambda)\,R_k + a_{ii}(\lambda)\,R_i\,, \tag{22}$$

wobei $\lambda_{ik} = \lambda_i\,\lambda_{i-1}\ldots\lambda_k$ (zyklisch aufgefaßt) und $\lambda = \lambda_{i-1,i} = \lambda_{k-1,k} = \lambda_m\,\lambda_{m-1}\ldots\lambda_1$ ist. Dies sind m algebraische Gleichungen für λ_i, deren unmittelbare Behandlung bei numerischen

Rechnungen im allgemeinen sehr mühsam ist. Bemerkenswert ist jedoch der Sonderfall, daß $R_k = 0$ für $k > 1$ ist. Dann vereinfachen sich die Gleichungen, wie folgt:

$$A_1 = a_{11}(\lambda)\, R_1\,,$$
$$A_i = \lambda_{i-1,1}\, a_{i1}(\lambda)\, R_1 \qquad (i > 1)\,.$$

Führt man $\bar{A}_i = \frac{A_i}{a_{i1}(\lambda)}$, $\bar{Z}_i = \frac{Z_i}{a_{i1}(\lambda)}$ ein, so wird $\bar{Z}_i = (1 - \lambda_i)\,\bar{A}_i$ und man erhält folgende Bestimmungsgleichungen für λ_i:

$$\bar{Z}_1 = (1 - \lambda_1)\,\bar{A}_1 = (1 - \lambda_{11})\, R_1\,,$$
$$\bar{Z}_k = (1 - \lambda_k)\,\bar{A}_k = (\lambda_{k-1,1} - \lambda_{k1})\, R_1 \qquad (1 < k \leq m)\,.$$

Daraus folgt durch Addition der ersten i Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{i} \bar{Z}_k = (1 - \lambda_{i1})\, R_1 \tag{23}$$

und speziell für $i = m$

$$\sum_{k=1}^{m} \bar{Z}_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{Z_k}{a_{k1}(\lambda)} = (1 - \lambda)\, R_1\,,$$

eine Bestimmungsgleichung für λ. Mit λ sind dann die Größen $a_{k1}(\lambda)$, sowie $d_{k1}(\lambda)$ und $f_{k1}(\lambda)$ bekannt. Für die Bestimmung von A_i, D_i und F_i erhält man unter Berücksichtigung, daß aus (23)

$$\lambda_{i1}\, R_1 = R_1 - \sum_{k=1}^{i} \bar{Z}_k = R_1 - \sum_{k=1}^{i} \frac{Z_k}{a_{k1}(\lambda)}$$

folgt

$$A_1 = a_{11}(\lambda)\, R_1 \qquad A_i = a_{i1}(\lambda)\, R_1 - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{i1}(\lambda)}{a_{k1}(\lambda)}\, Z_k \qquad (i > 1)\,,$$

$$D_1 = d_{11}(\lambda)\, R_1 \qquad D_i = d_{i1}(\lambda)\, R_1 - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{d_{i1}(\lambda)}{a_{k1}(\lambda)}\, Z_k \qquad (i > 1)\,,$$

$$F_1 = f_{11}(\lambda)\, R_1 \qquad F_1 = f_{i1}(\lambda)\, R_1 - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{f_{i1}(\lambda)}{a_{k1}(\lambda)}\, Z_k \qquad (i > 1)\,.$$

Ist $Z_i = 0$, dann ist $\lambda_i = \lambda = 1$ und man erhält die Betriebskette mit vollständigem Rücklauf. Ist dagegen $Z_m = A_m$, so erhält man die unverzweigte Betriebskette. Es wird dann mit λ_m auch $\lambda = 0$, und an Stelle von $a_{i1}(\lambda)$ usw. treten die entsprechenden Größen $a_{i1}(0)$. Sind sämtliche Werte Z_i vorgegeben, so folgt aus $\bar{A}_m = \bar{Z}_m = R_1 - \sum_{k=1}^{m-1} \bar{Z}_k$,

$$R_1 = \sum_{k=1}^{m} \bar{Z}_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{Z_k}{a_{k1}(0)}$$

und damit

$$A_i = \sum_{k=i}^{m} \frac{a_{i1}(0)}{a_{k1}(0)}\, Z_k\,. \tag{24}$$

Mit den entsprechenden Gleichungen für D_i und F_i ist damit für diesen Sonderfall ($R_k = 0$ für $k > 1$) der unverzweigten Betriebskette bei vorgegebenen Zwischenprodukten Z_k das Umkehrproblem gelöst und zugleich gezeigt, daß sich der Rohproduktbedarf R_1 linear in Z_i darstellen läßt. Ist R_k auch für $k > 1$ von Null verschieden, so lassen sich, wie hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden soll, die Werte λ_i in einfacher Weise und zwar rational aus R_k und Z_k berechnen; dagegen ist bei vorgegebenen R_k ($k > 1$) und Z_k die Größe R_1 im allgemeinen nicht mehr rational darstellbar.

Unter diesen Umständen ist es naheliegend, nach geeigneten Näherungsmethoden zu suchen. Dazu geht man zweckmäßig nicht von den Bestimmungsgleichungen (22) für λ_i aus,

sondern von dem Ansatz (man vergleiche auch den entsprechenden Ansatz in Gleichung (19))

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{d}_i &= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} \mathfrak{U}_{i-1,k}\,\bar{\mathfrak{U}}_{kk}\,(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{z}_{k-1}) + \bar{\mathfrak{U}}_{ii}\,(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{z}_{i-1}),\\ \mathfrak{a}_i &= \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{U}_{ik}\,\bar{\mathfrak{U}}_{kk}\,(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{z}_{k-1}),\\ \mathfrak{f}_i &= \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{V}_{ik}\,\bar{\mathfrak{U}}_{kk}\,(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{z}_{k-1}). \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Umsatzgleichungen

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{U}_i\,\mathfrak{d}_i \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{f}_i = \mathfrak{V}_i\,\mathfrak{d}_i,$$

sowie die Kopplungsgleichungen

$$\mathfrak{d}_i = \lambda_{i-1}\,\mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{r}_i = \mathfrak{a}_{i-1} + (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{z}_{i-1})$$

durch diesen Ansatz erfüllt sind. (Dabei ist wieder zu beachten, daß gemäß (12) $\mathfrak{U}_{i-1,i}\,\bar{\mathfrak{U}}_{ii} + \mathfrak{E} = \bar{\mathfrak{U}}_{ii}$ ist.) Dazu kommt jetzt noch die Forderung, daß $\mathfrak{z}_i$ und $\mathfrak{a}_i$ dieselbe Zusammensetzung haben. Bei Einführung der Bewertung $\mathfrak{b}'_{a_i}$ und der normierten Vektoren

$$\bar{\mathfrak{z}}_i = \frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{b}'_{a_i}\,\mathfrak{z}_i} = \frac{\mathfrak{z}_i}{Z_i} \qquad \text{und} \qquad \bar{\mathfrak{a}}_i = \frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{b}'_{a_i}\,\mathfrak{a}_i} = \frac{\mathfrak{a}_i}{A_i}$$

bedeutet dies, daß

$$\bar{\mathfrak{z}}_i = \bar{\mathfrak{a}}_i \qquad (26)$$

oder

$$\mathfrak{z}_i = \mathfrak{a}_i\,Z_i = \frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{b}'_{a_i}\,\mathfrak{a}_i}\,Z_i$$

für jede Bewertung $\mathfrak{b}'_{a_i}$ sein muß. Geht man nun von einer geeigneten Annahme für $\bar{\mathfrak{z}}_i$ aus, so läßt sich damit zunächst etwa $\mathfrak{d}_1$ berechnen. Daraus folgen aber zwangsläufig unter Benutzung der Umsatzgleichungen $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{U}_i\,\mathfrak{d}_i$ und der Kopplungsgleichungen

$$\mathfrak{d}_i = \left(1 - \frac{Z_{i-1}}{\mathfrak{b}'_{a_{i-1}}\,\mathfrak{a}_{i-1}}\right)\mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{r}_i$$

die übrigen $\mathfrak{d}_i$ und schließlich ein neuer Wert für $\mathfrak{d}_1$. Damit ist ein Iterationsverfahren gegeben, das sich an durchgerechneten Beispielen gut bewährt hat, dessen Konvergenzbeweis aber vom Verfasser noch nicht erbracht ist. Wenn der Wert $R_1 = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}_1}\,\mathfrak{r}_1$ die Werte R_k stark überwiegt, was praktisch in vielen Fällen zutrifft, so erweist sich insbesondere der Ansatz

$$\bar{\mathfrak{z}}_k = \frac{\mathfrak{U}_{k1}\,\bar{\mathfrak{r}}_1}{\mathfrak{b}'_{a_k}\,\mathfrak{U}_{k1}\,\bar{\mathfrak{r}}_1} \qquad (27)$$

als vorteilhaft. Es läßt sich nämlich zeigen, daß, wenn $R_k = 0$ für $k > 1$ ist, dieser Ansatz nicht nur für $Z_k = 0$ eine exakt richtige Lösung bedeutet, was ja trivial ist, sondern auch noch für den Fall, daß $\mathfrak{z}_m = \mathfrak{a}_m$ ist, die Betriebskette also in eine unverzweigte Betriebskette ausartet. Mit diesem Ansatz wird für $R_k = 0$ bei $k > 1$ aus (25)

$$\mathfrak{a}_i = (\mathfrak{U}_{i1}\,\bar{\mathfrak{U}}_{11}\,\bar{\mathfrak{r}}_1)\,R_1 - \sum_{k=1}^{m} (\mathfrak{U}_{i,k+1}\,\overline{\mathfrak{U}_{k+1,k+1}}\,\mathfrak{U}_{k1}\,\bar{\mathfrak{r}}_1)\bar{Z}_k \qquad \text{mit} \qquad \bar{Z}_k = \frac{Z_k}{\mathfrak{b}'_{a_k}\,\mathfrak{U}_{k1}\,\bar{\mathfrak{r}}_1}. \qquad (28)$$

Nun gilt gemäß Gleichung (11)

$$\overline{\mathfrak{U}_{k+1,k+1}}\,\mathfrak{U}_{k1} = \mathfrak{U}_{k1}\,\bar{\mathfrak{U}}_{11}.$$

Ferner gilt

$$\mathfrak{U}_{i,k+1}\,\mathfrak{U}_{k1} = \mathfrak{U}_{i1} \qquad \text{für} \quad i > k,$$

dagegen

$$= \mathfrak{U}_{i1}\,\mathfrak{U}_{m1} \qquad \text{für} \quad i \leq k.$$

Daraus folgt aber, daß

$$\mathfrak{U}_{i,k+1}\,\overline{\mathfrak{U}_{k+1,k+1}}\,\mathfrak{U}_{k1} = \mathfrak{U}_{i1}\,\bar{\mathfrak{U}}_{11} \qquad \text{für} \quad i > k,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{i,k+1}\,\overline{\mathfrak{U}_{k+1,k+1}}\,\mathfrak{U}_{k1} &= \mathfrak{U}_{i1}\,\mathfrak{U}_{m1}\,\bar{\mathfrak{U}}_{11}\\ &= \mathfrak{U}_{i1}(\bar{\mathfrak{U}}_{11} - \mathfrak{E})\\ &= \mathfrak{U}_{i1}\,\bar{\mathfrak{U}}_{11} - \mathfrak{U}_{i1} \qquad \text{für} \quad i \leq k \end{aligned}$$

wird (gemäß (12), für $k = 1$ und $\lambda = 1$). Damit wird aus (28)

$$\mathfrak{a}_i = (\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}\,\overline{\mathfrak{r}}_1)\,(R_1 - \sum_{k=1}^{m}\overline{Z}_k) + (\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{r}}_1)\sum_{k=i}^{m}\overline{Z}_k$$

und insbesondere

$$\mathfrak{a}_m = (\mathfrak{U}_{m1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}\,\overline{\mathfrak{r}}_1)\left(R_1 - \sum_{k=1}^{m}\overline{Z}_k\right) + (\mathfrak{U}_{m1}\,\overline{\mathfrak{r}}_1)\;\overline{Z}_m\,.$$

Ist nun $\mathfrak{z}_m = \mathfrak{a}_m$ (Ausartung in die unverzweigte Betriebskette) und damit auch

$$\mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_m}\,\mathfrak{a}_m = Z_m\,,$$

so folgt aus

$$Z_m = (\mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_m}\,\mathfrak{U}_{m1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}\,\overline{\mathfrak{r}}_1)\left(R_1 - \sum_{k=1}^{m}\overline{Z}_k\right) + Z_m\,,$$

wenn man den trivialen Fall $\mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_m}\,\mathfrak{U}_{m1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}\,\overline{\mathfrak{r}}_1 = 0$ außer Betracht läßt,

$$R_1 = \sum_{k=1}^{m}\overline{Z}_k$$

und damit

$$\mathfrak{a}_i = (\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{r}}_1)\sum_{k=i}^{m}\overline{Z}_k\,,$$

sowie unter Berücksichtigung von (27)

$$\overline{\mathfrak{a}}_i = \frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_i}\,\mathfrak{a}_i} = \frac{\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{r}}_1}{\mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_i}\,\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{r}}_1} = \mathfrak{z}_i\,,$$

d. h. die Forderung (26) ist erfüllt. Führt man in Übereinstimmung mit (20) die normierten Vektoren

$$\overline{\mathfrak{a}_{i1}(1)} = \frac{\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}\,\overline{\mathfrak{r}}_1}{\mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_i}\,\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}\,\overline{\mathfrak{r}}_1} = \frac{\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11}\,\overline{\mathfrak{r}}_1}{a_{i1}(1)} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{a}_{i1}(0)} = \frac{\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{r}}_1}{\mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_i}\,\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{r}}_1} = \frac{\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{r}}_1}{a_{i1}(0)}$$

ein, wobei also

$$\mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_i}\,\overline{\mathfrak{a}}_{i1}(1) = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_i}\,\overline{\mathfrak{a}}_{i1}(0) = 1$$

gilt, so läßt sich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_i &= a_{i1}(1)\left(R_1 - \sum_{k=1}^{m}\overline{Z}_k\right)\cdot\overline{\mathfrak{a}_{i1}(1)} + a_{i1}(0)\sum_{k=i}^{m}\overline{Z}_k\cdot\overline{\mathfrak{a}_{i1}(0)}\,,\\ A_i &= \mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_i}\,\mathfrak{a}_i = a_{i1}(1)\left(R_1 - \sum_{k=1}^{m}\overline{Z}_k\right) + a_{i1}(0)\sum_{k=i}^{m}\overline{Z}_k \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

schreiben. Die letzte Gleichung geht für $R_1 = \sum_{k=1}^{m}\overline{Z}_k$ (Ausartung in die unverzweigte Betriebskette) unter Beachtung von (28) in Gleichung (24) über.
Für den Fehler der mit dem Ansatz

$$\overline{\mathfrak{z}}_i = \frac{\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{r}}_1}{\mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}_i}\,\mathfrak{U}_{i1}\,\overline{\mathfrak{r}}_1} = \overline{\mathfrak{a}_{i1}(0)}$$

durchgeführten Näherungsrechnung gibt die Differenz $(\overline{\mathfrak{a}}_i - \overline{\mathfrak{z}}_i)\,Z_i$, die ja bei der strengen Lösung verschwinden muß, ein geeignetes Maß. Nun ergibt sich aus (29)

$$\overline{\mathfrak{a}}_i = \frac{\mathfrak{a}_i}{A_i} = \frac{a_{i1}(1)\left(R_1 - \sum_{k=1}^{m}\overline{Z}_k\right)\cdot\overline{\mathfrak{a}_{i1}(1)} + a_{i1}(0)\sum_{k=i}^{m}\overline{Z}_k\,\overline{\mathfrak{a}_{i1}(0)}}{a_{i1}(1)\left(R_1 - \sum_{k=1}^{m}\overline{Z}_k\right) + a_{i1}(0)\sum_{k=i}^{m}\overline{Z}_k}\,.$$

Somit wird

$$(\overline{\mathfrak{a}}_i - \overline{\mathfrak{z}}_i)\,Z_i = (\overline{\mathfrak{a}}_i - \overline{\mathfrak{a}_{i1}(0)})\,Z_i = (\overline{\mathfrak{a}_{i1}(1)} - \overline{\mathfrak{a}_{i1}(0)})\;\frac{a_{i1}(1)\left(R_1 - \sum_{k=1}^{m}\overline{Z}_k\right)Z_i}{a_{i1}(1)\left(R_1 - \sum_{k=1}^{m}\overline{Z}_k\right) + a_{i1}(0)\sum_{k=i}^{m}\overline{Z}_k}\,.$$

Berücksichtigt man, daß gemäß der Bedeutung der Umsatzmatrizen $a_{i1}(1)$ und $a_{i1}(0) > 0$ sind, so ergibt sich die Abschätzung

$$(\bar{a}_i - \bar{\delta}_i)\, Z_i \leq (\overline{a_{i1}(1)} - \overline{a_{i1}(0)})\, Z_i .$$

Hat man für die unverzweigte Betriebskette und für die Betriebskette mit (vollständiger) Rückführung die Matrizen mit normiertem Rohprodukteinsatz $\bar{\tau}_1$ berechnet, so lassen sich daraus die Vektoren $\mathfrak{a}_{i1}(1)$ und $\mathfrak{a}_{i1}(0)$ ohne weiteres entnehmen. Für das in Tabelle 1 durchgerechnete Beispiel ergibt sich beispielsweise bei einem Einsatz von Kokswassergas (CO + H_2-Bewertung)

$$\mathfrak{a}_{21}(1) = \begin{pmatrix} 0{,}0215 \\ 0{,}0519 \\ 0{,}9866 \\ 0{,}0275 \\ 0{,}0053 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{a}_{21}(0) = \begin{pmatrix} 0{,}0200 \\ 0{,}0485 \\ 0{,}9215 \\ 0{,}0270 \\ 0{,}0050 \end{pmatrix}.$$

Bei einer (CO + H_2)-Bewertung für $\mathfrak{a}_2$ ergibt sich daraus

$$\overline{\mathfrak{a}_{21}(1)} = \frac{\mathfrak{a}_{21}(1)}{1{,}0385} = \begin{pmatrix} 0{,}0207 \\ 0{,}0500 \\ 0{,}9500 \\ 0{,}0265 \\ 0{,}0051 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{a}_{21}(0)} = \frac{\mathfrak{a}_{21}(0)}{0{,}9700} = \begin{pmatrix} 0{,}0206 \\ 0{,}0500 \\ 0{,}9500 \\ 0{,}0278 \\ 0{,}0052 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\overline{\mathfrak{a}_{21}(1)} - \overline{\mathfrak{a}_{21}(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}0001 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ -0{,}0013 \\ -0{,}0001 \end{pmatrix}.$$

Werden außer R_1 auch noch an anderen Stellen Rohprodukte R_k eingesetzt, verschwindet also R_k nicht für alle $k > 1$, so treten in der obigen Gleichung für $(\bar{a}_i - \bar{\delta}_i)\, Z_i$ noch weitere Glieder mit R_k auf. Praktisch erweist sich aber der gewählte Ansatz $\bar{\delta}_i = \overline{\mathfrak{a}_{i1}(0)}$ auch in solchen Fällen als sehr brauchbar und zwar einmal, weil R_1 meist überwiegt, dann aber auch, weil sich die Zusammensetzung von $\mathfrak{r}_k$, wenn ein Einsatz an der Stelle k überhaupt möglich sein soll, nicht zu sehr von der Zusammensetzung von $\mathfrak{a}_{k-1}$ unterscheiden darf. Die betriebsmäßigen Bedingungen, die an $\mathfrak{r}_k$ für $k > 1$ gestellt werden müssen, tragen daher häufig dazu bei, daß durch den obigen Ansatz brauchbare, in R_k und Z_k lineare Näherungslösungen möglich sind. Genau wie für A_i in Gleichung (29) lassen sich auch für D_i und F_i in solchen Fällen mit guter Annäherung in R_k und Z_k lineare Darstellungen geben, die sich etwa in der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{d}} \\ \bar{\mathfrak{a}} \\ \bar{\mathfrak{f}} \end{pmatrix} = \mathfrak{Q} \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{r}} \\ \bar{\mathfrak{z}} \end{pmatrix}$$

zusammenfassen lassen und die dann weiteren Umformungen, wie sie im Abschnitt 3b behandelt wurden, leicht zugänglich ist. In diesem Zusammenhang möge auch noch kurz auf den Fall[1] eingegangen werden, bei dem die Ausbeuten durch

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{U}_i\, \mathfrak{d}_i - \mathfrak{a}_{0i}\, t$$

dargestellt sind. Setzt man $\mathfrak{a}_i^* = \mathfrak{U}_i\, \mathfrak{d}_i$, so wird

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i^* - \mathfrak{a}_{0i}\, t$$

und die Kopplungsbedingungen

$$\mathfrak{d}_i = \mathfrak{a}_{i-1} + (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{z}_{i-1})$$

gehen über in

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_i &= \mathfrak{a}_{i-1}^* + (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{z}_{i-1} - \mathfrak{a}_{0,i-1}\, t) \\ &= \mathfrak{a}_{i-1}^* + (\mathfrak{r}_i^* - \mathfrak{z}_{i-1}) , \end{aligned}$$

[1] Siehe I, S. 121.

wo

$$\mathfrak{r}_i^* = \mathfrak{r}_i - \mathfrak{a}_{0,i-1}\, t$$

gesetzt ist. Damit ist das Problem, wenn der Vektor $\mathfrak{a}_{0i}$ vorgegeben ist, auf das bereits behandelte zurückgeführt. Ist der Vektor $\mathfrak{a}_{0i}$ dagegen in der Form

$$\mathfrak{a}_{0i} = A_{0i}\, \bar{\mathfrak{a}}_i$$

vorgegeben, wo wieder

$$\bar{\mathfrak{a}}_i = \frac{\mathfrak{a}_i}{A_i} = \frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{b}'_{0i}\, \mathfrak{a}_i}$$

ist, so setzt man

$$\mathfrak{z}_{\delta i}^* = \mathfrak{z}_i + \mathfrak{a}_{0i} = (Z_i + A_{0i})\, \bar{\mathfrak{a}}_i$$

und hat dann das Problem ebenfalls zurückgeführt. Ähnlich verfährt man, wenn für $\mathfrak{f}_i$ die erweiterte Darstellung

$$\mathfrak{f}_i = \mathfrak{W}_i\, \mathfrak{d}_i - \mathfrak{f}_{0i}\, t$$

angewandt werden muß.

Was schließlich die Behandlung des Problems bei allgemeinen Kopplungsbedingungen anlangt, so ist der Ansatz dazu ohne weiteres aufzustellen, wenn man die Gleichung (3) in der Form

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{L}\, \mathfrak{a}$$

schreibt, wo $\mathfrak{L}$ eine Diagonalmatrix mit den Elementen $\mathfrak{E}_n - \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{W}_{ik}$ bedeutet. Unter Benutzung der Gleichung (6) wird daraus:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{L}\, \mathfrak{U}\, (\mathfrak{E} - \mathfrak{W}\, \mathfrak{U})^{-1}\, \mathfrak{W}^*\, \mathfrak{r}.$$

Führt man Bewertungen ein, so erhält man daraus skalare Gleichungen für die Elemente der Matrix $\mathfrak{W}$, die den Gleichungen (22) entsprechen. Während dort für praktisch brauchbare Lösungen für λ_i die Schranken

$$0 \leq \lambda_i \leq 1$$

bestehen, gilt jetzt neben

$$0 \leq w_{ik} \leq 1$$

auch noch

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} w_{ik} \leq 1\,.$$

Dazu treten praktisch noch eine Reihe weitere Bedingungen $w_{ik} = 0$ für bestimmte i und k, da es praktisch im allgemeinen nicht möglich ist, jede beliebige Ausbeute $\mathfrak{a}_k$ in jeden beliebigen Betrieb i einzusetzen. Gerade diese Einschränkung erlaubt es, auch in anderen als den oben behandelten Sonderfällen ohne übermäßigen Zeitaufwand Lösungen zu finden.

d) Umkehrprobleme bei durchsatzbedingten Kopplungen. Bei dem Umkehrproblem bei Zwischenproduktentnahme sind gewisse mathematische Schwierigkeiten durch die Forderungen entstanden, daß sämtliche Komponenten der Ausbeuten $\mathfrak{a}$ in gleicher Weise verteilt werden müssen. Nun gibt es aber viele Fälle, wo diese Forderung nicht besteht und sich dann das Umkehrproblem auch bei allgemeiner Kopplung sehr einfach lösen läßt; es kommt auch praktisch vor, daß etwa bei Gasen oder Flüssigkeitsgemischen diese Forderung durch technische Maßnahmen, z. B. durch Einschalten einer Gastrennungsanlage oder Destillation, beseitigt wird. Zur Darstellung des Umkehrproblems in solchen Fällen werden nun — in teilweiser Abänderung der früheren Bezeichnungen — sämtliche im System vorkommenden Ausbeuten und Rohstoffe durch die skalaren Größen A_{ik} und R_{jk} bezeichnet, wo der erste Zeiger i bzw. j die Art der Ausbeuten bzw. Rohstoffe und k den Betrieb, in dem die Ausbeuten anfallen oder in dem die Rohstoffe eingesetzt werden, bedeuten. Dabei sollen für A_{ik} auch negative Werte zugelassen werden, und ein solcher negativer Wert soll bedeuten, daß in dem Betrieb k eine bestimmte Menge der Ausbeutesorte i eingesetzt wird. Es werde nun — vorbehaltlich einer nachstehend noch zu bringenden Erweiterung — angenommen, daß der Ablauf des Betriebes k durch einen skalaren Parameter, den Durchsatz D_k, eindeutig beschrieben und insbesondere

$$A_{ik} = w_{ik}\, D_k\,, \qquad R_{jk} = w_{jk}^*\, D_k$$

gesetzt werden kann, wo unbeschadet ihrer geänderten Bedeutung die Verteilungskoeffizienten aus Abschnitt 2 übernommen sind. Der Durchsatz D_k ist bei dieser Auffassung nicht gleichbedeutend mit dem Einsatz; er kann es gelegentlich sein, er kann aber ebenso gut mit einem bestimmten A_{ik} oder einer linearen Kombination aus solchen zusammenfallen. Man kann ihn in gewissem Sinn als „verallgemeinerten Durchsatz" bezeichnen, ähnlich wie man in der Mechanik von einem verallgemeinerten Impuls usw. spricht. Dagegen ist es notwendig, die obigen Ansätze zur Berücksichtigung von Verlusten und sonstigen durchsatzunabhängigen Einflüssen, wie folgt, zu erweitern:

$$\left.\begin{aligned} A_{ik} &= w_{ik}\, D_k + \mathfrak{w}'_{ik}\,\mathfrak{t}\,, \\ R_{ik} &= w^*_{ik}\, D_k + \mathfrak{w}'^*_{ik}\,\mathfrak{t}\,. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{t}$ einen vektoriellen Parameter (Spaltenvektor), dessen Komponenten die verschiedenen den Betriebsablauf beeinflussenden Größen, z. B. Lufttemperatur, darstellen. Seine Dimension sei so gewählt, daß sie die Einflußgrößen sämtlicher Betriebe umfaßt; $\mathfrak{w}'_{ik}$ und $\mathfrak{w}'^*_{ik}$ sind Zeilenvektoren derselben Dimension. Meist wird $\mathfrak{t}$ die Zeit t enthalten (s. Abschnitt 3c den Ansatz $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{U}_i\,\mathfrak{d}_i - \mathfrak{a}_{0i}\,t$); dann bedeuten D_{ik}, A_{ik} und R_{ik} die Durchsätze, Ausbeuten und Rohstoffeinsätze in der Zeit t.

Die über k genommene Summe $\Sigma\, A_{ik}$ stellt nun den das aus m Betrieben bestehende System verlassenden Ausbeuteüberschuß der Sorte i dar; er soll im Gegensatz zu den früheren Abschnitten, wo er mit Z_i bezeichnet wurde, jetzt als Fertigprodukt F_i bezeichnet werden. Desgleichen bedeutet $R_j = \Sigma\, R_{jk}$ den gesamten in das Betriebssystem eingesetzten Rohstoff der Sorte j. Damit läßt sich aber unter Benutzung von (30) schreiben

$$F_i = \Sigma\, A_{ik} = \sum_{k=1}^{m} w_{ik}\, D_k + \left(\sum_{k=1}^{m} \mathfrak{w}'_{ik}\right)\mathfrak{t}\,,$$

$$R_i = \Sigma\, R_{ik} = \sum_{k=1}^{m} w^*_{ik}\, D_k + \left(\sum_{k=1}^{m} \mathfrak{w}'^*_{ik}\right)\mathfrak{t}\,.$$

Mit

$$\mathfrak{W} = (w_{ik})\ (n \text{ Zeilen},\ m \text{ Spalten})\quad \mathfrak{W}_t = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{w}'_{1k} \\ \cdot \\ \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{w}'_{nk} \end{pmatrix}\ (n \text{ Zeilen},\ s \text{ Spalten})\,,$$

$$\mathfrak{W}^* = (w^*_{ik})\ (l \text{ Zeilen},\ m \text{ Spalten})\quad \mathfrak{W}^*_t = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{w}'^*_{1k} \\ \cdot \\ \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{w}'^*_{lk} \end{pmatrix}\ (l \text{ Zeilen},\ s \text{ Spalten})\,,$$

wo n die Anzahl der Ausbeutesorten, l die Anzahl der Rohstoffsorten, m die Anzahl der Betriebe und s die Anzahl sämtlicher Einflußgrößen (Dimension des Vektors $\mathfrak{t}$) bedeuten, sowie mit

$$\mathfrak{f} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ F_n \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{r} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ R_l \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{d} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ D_m \end{pmatrix}$$

läßt sich nun

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{f} \\ \mathfrak{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{W} & \mathfrak{W}_t \\ \mathfrak{W}^* & \mathfrak{W}^*_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{d} \\ \mathfrak{t} \end{pmatrix} = \mathfrak{Q} \begin{pmatrix} \mathfrak{d} \\ \mathfrak{t} \end{pmatrix} \tag{31}$$

schreiben und daraus erhält man, wie in Abschnitt 3b gezeigt wurde, durch entsprechende Umkehrung wieder die Gleichung (16),

$$\mathfrak{l} = \begin{pmatrix} \mathfrak{r} \\ \mathfrak{d} \\ \mathfrak{f} \end{pmatrix} = \mathfrak{P} \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{f}} \\ \mathfrak{n} \end{pmatrix},$$

wo nun die Komponenten von $\mathfrak{t}$ unter denen von $\mathfrak{n}$ enthalten sind. Es sei noch bemerkt, daß sich auch bei den in den vorigen Abschnitten behandelten, durch $\bar{\mathfrak{z}} = \bar{\mathfrak{a}}$ gekennzeichneten Fällen eine in D_k lineare Darstellung wenigstens näherungsweise erreichen ließ; dort war dies aber erst nach einem längeren Umweg möglich, während hier von vornherein von einem solchen Ansatz ausgegangen werden konnte.

Es kann vorkommen, daß ein skalarer Durchsatzparameter D_k (auch neben dem Parameter $\mathfrak{t}$) zur Beschreibung des Betriebsablaufes im Betrieb k nicht ausreicht. Dann ersetzt man D_k durch den vektoriellen Durchsatzparameter $\mathfrak{d}_k$ und ersetzt (30) durch

$$\left.\begin{aligned} A_{ik} &= \mathfrak{v}'_{ik}\,\mathfrak{d}_k + \mathfrak{w}'_{ik}\,\mathfrak{t}\,, \\ R_{ik} &= \mathfrak{v}'^{*}_{ik}\,\mathfrak{d}_k + \mathfrak{w}'^{*}_{ik}\,\mathfrak{t}\,. \end{aligned}\right\} \tag{30a}$$

Es haben dann $\mathfrak{W} = (\mathfrak{v}'_{ik})$ und $\mathfrak{W}^* = (\mathfrak{v}'^{*}_{ik})$ mehr Spalten und $\mathfrak{d}$ mehr Komponenten. Sonst ändert sich nichts an der Ableitung.

Als Beispiel für ein Betriebssystem, das sich in der beschriebenen Weise behandeln läßt, sei die Energieabteilung eines Chemiewerkes genannt. Diese hat im Gegensatz zu einer Überlandzentrale nicht nur Strom, sondern auch Dampf verschiedener Druckstufen, Rohwasser, Reinwasser, Druckluft und sonstige „Energiearten" zu liefern, während umgekehrt jeder einzelne der Energiebetriebe fast jede dieser Energiearten verbraucht oder liefert.

4. Zusammenfassung. Die Anwendung der Matrizenrechnung auf betriebswirtschaftliche Aufgaben, die bereits in einer früheren Mitteilung an einfacheren Beispielen gezeigt wurde, führt auch bei schwierigeren Aufgaben zum Ziel. Der schmiegsame Kalkül gestattet eine Darstellung der Lösung in sehr allgemeinen Fällen. Dabei zeigt es sich, daß es betriebswirtschaftliche Fragestellungen gibt, die zu ähnlichen rechnerischen Schwierigkeiten führen wie die Eigenwertprobleme. Es erscheint daher zweckmäßig, auch bei der Bearbeitung betriebswirtschaftlicher Aufgaben ausreichende mathematische Hilfsmittel anzuwenden, um zu Lösungen zu kommen, die praktisch befriedigen.

(Eingegangen am 28. September 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *O. Pichler*, Leuna (Krs. Merseburg), Wickenweg 9.

Die Berechnung des Profilwiderstandes aus der vorgegebenen Profilform.

Von E. Truckenbrodt.

1. Einleitung. Die Berechnung des Profilwiderstandes umströmter Körper ist mit den Methoden der Grenzschichttheorie möglich, solange die Reibungsschicht am Körper noch nicht abgelöst ist. Erstmalig wurden für den ebenen Fall (zweidimensionale Strömung) Verfahren von *J. Pretsch*[1] und *H. B. Squire* und *A. D. Young*[2] angegeben. Ausgehend von der potentialtheoretischen Geschwindigkeitsverteilung um den Körper ist in beiden Fällen eine Grenzschichtrechnung auszuführen, deren Ergebnis (Impulsverlustdicke an der Profilhinterkante) dann in geeigneter Form in die Widerstandsformeln eingeht. Mit der Vervollkommnung und Verbesserung der Verfahren zur Berechnung der Reibungsschicht ließen sich auch die Widerstandsformeln verbessern und vereinfachen. *H. B. Helmbold*[3] gelangt so zu einer geschlossenen Formel zur Berechnung des Profilwiderstandes, in der nur die Widerstandsbeiwerte der ebenen Platte und die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung um den Körper vorkommen. Durch geeignete Abstimmung der vorkommenden Konstanten beseitigt er die an der Hinterkante zuweilen auftretenden Schwierigkeiten. Erwähnt sei auch ein Verfahren von *N. Scholz*[4] über die Berechnung des Strömungswiderstandes schlanker Körper mit beliebig rauher Oberfläche.

Zur Berechnung der an der Hinterkante benötigten Impulsverlustdicke wurde inzwischen von *E. Truckenbrodt*[5] unter Berücksichtigung der neuesten Forschungsergebnisse insbesonders bei turbulenten Strömungen eine einfache Quadraturformel hergeleitet. Die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung um den Körper läßt sich für schlanke Profilkörper nach der Singularitätenmethode von *F. Riegels*[6] in einfacher Weise berechnen.

Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Widerstandsformel so umzuformen, daß darin nicht mehr die Geschwindigkeitsverteilung sondern unmittelbar die Profilform vorkommt. Eine solche Umformung ist möglich für die zirkulationsfreie Umströmung eines schlanken Profilkörpers. Wir geben also eine Formel zur Berechnung des Widerstandsanteils an, der durch die Verdrängungswirkung des Profiltropfens entsteht. Den Widerstandsanteil einer Sklettlinienwölbung schätzen wir ab.

2. Die Ausgangsformeln. Den Widerstand eines mit der Geschwindigkeit U_∞ angeströmten Körpers der Breite b erhält man in bekannter Weise aus der Geschwindigkeitsverteilung im Nachlauf in großem Abstand hinter dem Körper zu

$$W = c_w F \frac{\varrho}{2} U_\infty^2 = \varrho b \int_{y=-\infty}^{\infty} u_\infty (U_\infty - u_\infty)\, dy. \tag{1}$$

Dabei ist $F = bl$ die Projektionsfläche des Körpers, l seine Länge und $u_\infty(y)$ die Geschwindigkeitsverteilung im Nachlauf weit hinter dem Flügel.

Unter Einführung der Impulsverlustdicke in unendlichem Abstand hinter dem Körper

$$\vartheta_\infty = \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{u_\infty}{U_\infty}\left(1 - \frac{u_\infty}{U_\infty}\right) dy \tag{2}$$

läßt sich (1) in der Form

$$c_w = 2\,\frac{\vartheta_\infty}{l}, \tag{1a}$$

schreiben, wo c_w den Widerstandsbeiwert bedeutet.

---

[1] *J. Pretsch*, Jahrb. 1938 d. Deutsch. Luftfahrtforsch., S. I, 61.

[2] *H. B. Squire* und *A. D. Young*, The calculation of the profile drag of aerofoils, ARC-Rep. 1838 (1938).

[3] *H. B. Helmbold*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 273. Ein ähnliches Verfahren wird angegeben von *E. M. Dowlen*, Journal Roy. Aeron; Soc., 56 (1952), S. 109.

[4] *N. Scholz*, Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellsch. 45 (1951), S. 244.

[5] *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 211.

[6] *F. Riegels*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 373; 17 (1949), S. 94 und 18 (1950), S. 329. Vgl. auch *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 324 und 19 (1951), S. 365.

Der wesentliche Inhalt der Verfahren von *Pretsch* und *Squire-Young* besteht nun darin, eine Beziehung zwischen der Impulsverlustdicke an der Profilhinterkante und der Impulsverlustdicke in unendlichem Abstand hinter dem Profil herzustellen.

Für die Impulsverlustdicke an der Hinterkante $x = x_h$ hervorgerufen durch die Reibungswirkung einer Profilseite (Ober- bzw. Unterseite) schreiben wir

$$\vartheta_h = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u_h}{U_h}\left(1 - \frac{u_h}{U_h}\right) dy \,. \tag{3}$$

Nach *Squire-Young* ergibt sich auf halbempirischem Wege für das Impulsverlustdickenverhältnis die Beziehung

$$\frac{\vartheta_\infty}{\vartheta_h} = 2\left(\frac{U_h}{U_\infty}\right)^{\frac{H_h+5}{2}} . \tag{4}$$

H_h bedeutet den Grenzschichtformparameter (Verhältnis von Verdrängungsdicke zu Impulsverlustdicke) an der Hinterkante. Da das Geschwindigkeitsverhältnis U_h/U_∞ an der Hinterkante nur wenig vom Wert eins abweicht[1], spielt die Größe $(H_h+5)/2$ keine sehr große Rolle. Während *H. Schlichting*[2] den Wert 3,2 vorschlägt, rechnet *H. B. Helmbold* mit 3,5.

In Abb. 1 haben wir das Impulsverlustdickenverhältnis $\vartheta_\infty/\vartheta_h$ für die Formparameter $H_h = 1{,}4$ und 2,0 in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsverhältnis U_h/U_∞ aufgetragen.

Nach *Pretsch* gilt für das Impulsverlustdickenverhältnis die Beziehung

$$\frac{\vartheta_\infty}{\vartheta_h} = \zeta \,, \tag{5}$$

wobei sich die Größe ζ ein für allemal in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsverhältnis U_h/U_∞ und vom *Gruschwitz*schen Formparameter η darstellen läßt. Wir entnehmen diesen Zusammenhang einer Arbeit von *A. Walz*[3] und haben ihn in Abb. 1 wiedergegeben. Die Übereinstimmung mit den Kurven von *Squire-Young* kann als gut bezeichnet werden. Bei unseren Rechnungen wollen wir für das Impulsverlustdickenverhältnis setzen

$$\frac{\vartheta_\infty}{\vartheta_h} = 2\left(\frac{U_h}{U_\infty}\right)^3 . \tag{6}$$

Auch dieser Zusammenhang ist in Abb. 1 dargestellt.

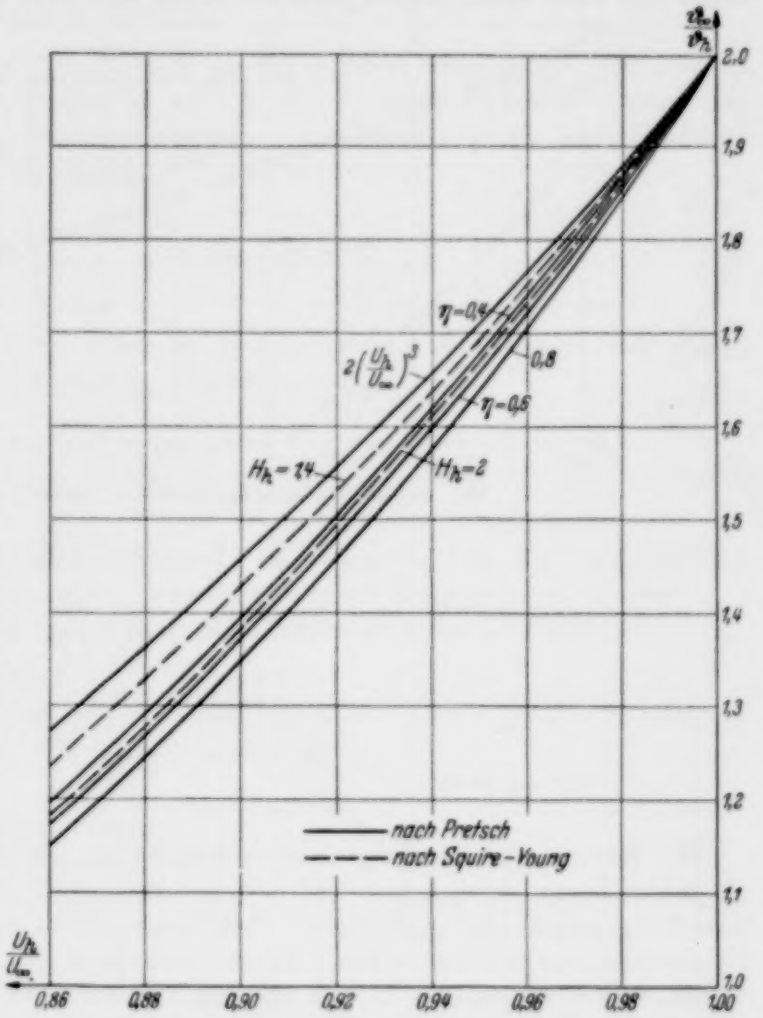

Abb. 1. Das Impulsverlustdickenverhältnis $\vartheta_\infty/\vartheta_h$ in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsverhältnis U_h/U_∞ nach *J. Pretsch* und *H. B. Squire* und *A. D. Young*

Die Impulsverlustdicke an der Hinterkante einer Profilseite berechnen wir nach der Quadraturformel von *E. Truckenbrodt*[4]. Diese lautet:

$$\frac{\vartheta_h}{l} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_\infty}{U_h}\right)^3 \left[c_{f_l}^{1+n} \left(\int_0^{x_u/l} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^5 d\frac{x}{l} \right)^{\frac{1+n}{2}} + c_{f_t}^{1+n} \int_{x_u/l}^{x_h/l} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{3+2n} d\frac{x}{l} \right]^{\frac{1}{1+n}} . \tag{7}$$

[1] Diese Aussage gilt für die wirklichen Geschwindigkeiten, während sich für die Potentialgeschwindigkeiten bei endlichem Hinterkantenwinkel an der Hinterkante der Wert null ergibt.

[2] *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie, S. 467. Karlsruhe (1951).

[3] *A. Walz*, Einige Beispiele zur theoretischen Berechnung der Polare eines Tragflügelprofils. Forsch. Ber. d. Deutsch. Luftfahrtforsch. Nr. 1848 (1943).

[4] Siehe Fußnote 5 auf Seite 176.

Hierin ist x der vom Staupunkt aus gemessene Abstand auf der Profilkontur. Er ist bei schlanken Profilen, mit denen wir uns im folgenden befassen wollen, in guter Näherung gleich dem Abstand gemessen auf der Profilsehne. Es gilt dann $x_h = l$. Die Größe x_u gibt die Lage des Umschlagspunktes vom laminaren in den turbulenten Strömungszustand an und wird im folgenden als bekannt angenommen. U/U_∞ ist die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung um den Profilkörper. Es bedeuten c_{f_l} und c_{f_t} die Widerstandsbeiwerte einer mit der Geschwindigkeit U_∞ längsangeströmten einseitig benetzten ebenen Platte von der Länge l. Für glatte Profiloberflächen sind in Abb. 2 die Widerstandsgesetze der ebenen Platte dargestellt. Ist die Oberfläche rauh, so setzt man für c_f die entsprechenden rauhen Widerstandsbeiwerte der ebenen Platte ein. Die Größe n wird von *E. Truckenbrodt* mit

$$n = \frac{1}{6} \tag{8}$$

angegeben.

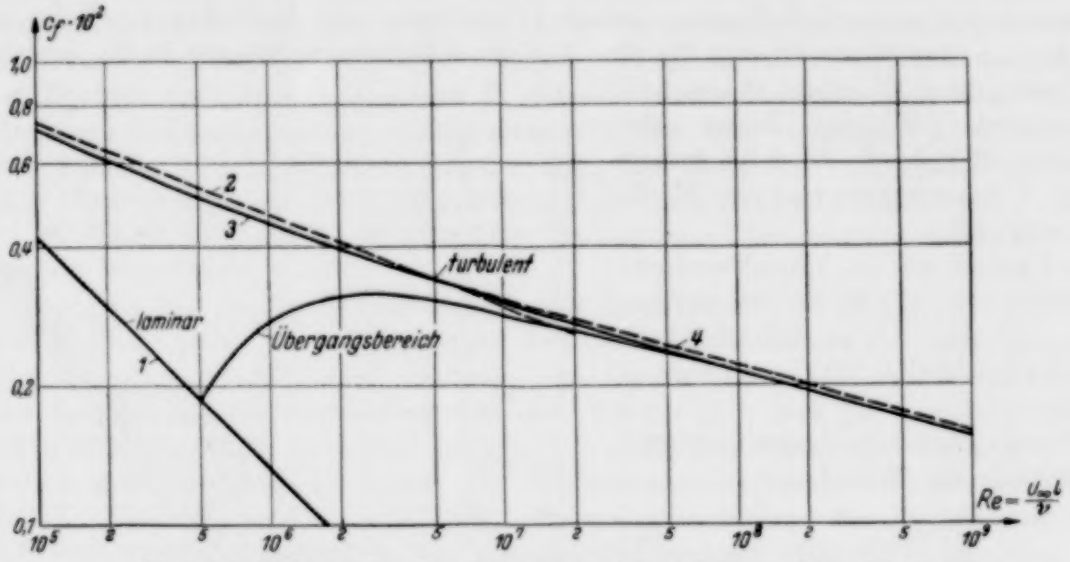

Abb. 2. Die Widerstandsgesetze der längsangeströmten ebenen glatten Platte.

(1) Blasius $c_f = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{Re}}$ laminar

(2) Prandtl $c_f = \dfrac{0{,}074}{\sqrt[5]{Re}}$

(3) Prandtl-Schlichting $c_f = \dfrac{0{,}455}{(\lg Re)^{2{,}58}}$ turbulent

(4) Falkner $c_f = \dfrac{0{,}0306}{\sqrt[7]{Re}}$

Die Formel für die Impulsverlustdicke ϑ_h können wir angenähert auch so schreiben, daß wir jeden Term für sich mit $1/(1+n)$ potenzieren[1]. Physikalisch bedeutet das, daß hinter dem Umschlagspunkt die turbulente Reibungsschicht sich so ausbildet, als wenn keine laminare Vorstrecke vorhanden wäre. Diese Annahme ist bei größeren *Reynolds*schen Zahlen gut erfüllt. Man vergleiche hierzu die noch später gemachten Angaben für den Widerstand der längsangeströmten ebenen Platte bei verschiedenen Lagen des Umschlagspunktes.

Wir setzen jetzt sämtliche Beziehungen in die Widerstandsformel (1a) ein und finden schließlich

$$\frac{c_w}{2} = c_{f_l}\left[\int_0^{x_u}\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^5 dx\right]^{1/2} + c_{f_t}\left[\int_{x_u}^{1}\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{10/3} dx\right]^{6/7}. \tag{9}$$

Der vereinfachten Schreibweise wegen wollen wir fortan schreiben

$$\frac{x}{l} \equiv x\,.$$

[1] Mathematisch gesehen setzen wir also $(x+y)^a \approx x^a + y^a$. Der maximale Fehler, den man bei einer solchen Entwicklung macht, ergibt sich bei $x = y$. Er beträgt $2^{1-a} = 2^{n/1+n} = 2^{1/7} = 1{,}10$.

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, wollen wir die Geschwindigkeitsverteilung U/U_∞ nach dem Singularitätenverfahren von *F. Riegels*[1] berechnen. Für den hier betrachteten Fall des in Sehnenrichtung angeströmten symmetrischen Profilkörpers gilt

$$\frac{U}{U_\infty}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left(1 + \frac{1}{\pi}\oint_0^1 \frac{dy}{dx'}(x')\,\frac{dx'}{x-x'}\right). \tag{10}$$

Hierin stellen $y = y^{(t)}/l$ die Ordinaten des Profiltropfens dar. Der Faktor $1/\sqrt{1+y'^2}$ bildet eine Korrektur für die Stellen starker Krümmung der Profiloberfläche (Nase). Da wir uns mit schlanken Körpern befassen wollen, wollen wir ihn gleich eins setzen. Für unsere weiteren Rechnungen ist es zweckmäßig, die Formel (10) in etwas anderer Form zu verwenden. Aus der Theorie der Quell-Senkenbelegungen erhält man

$$\frac{U}{U_\infty}(x) = 1 + \frac{1}{\pi}\lim_{z\to 0}\int_0^1 y(x')\,\frac{z^2-(x-x')^2}{[z^2+(x-x')^2]^2}\,dx'\,. \tag{11}$$

Durch Bildung des Grenzwertes und entsprechende partielle Integration kann man die Identität mit (10) zeigen.

3. Die Widerstandsformel. In (9) kommt die Geschwindigkeitsverteilung mit der Potenz $3+2n$ ($n=1$ für das erste Glied und $n={}^1/_6$ für das zweite Glied) vor. Unter der Annahme schlanker Profile, d. h. kleiner Verdrängungsgeschwindigkeiten im Vergleich zur Anströmungsgeschwindigkeit, $U \approx U_\infty$, können wir in linearisierter Form schreiben

$$\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{3+2n}(x) = 1 + \frac{3+2n}{\pi}\lim_{z\to 0}\int_0^1 y(x')\,\frac{z^2-(x-x')^2}{[z^2+(x-x')^2]^2}\,dx'\,. \tag{12}$$

Mit diesem Ansatz gehen wir in (9) hinein und finden nach Ausführung der Integration über x und nachfolgender Grenzwertbildung sowie weiterer Linearisierung

$$\frac{c_w}{2} = c_{f_l}\left(1 + \frac{5}{2\pi}\oint_0^1 \frac{y(x)}{x(x_u-x)}\,dx\right)x_u^{1/2} + c_{f_t}\left(1 + \frac{20}{7\pi}\oint_0^1 \frac{y(x)}{(1-x)\,(x-x_u)}\,dx\right)(1-x_u)^{6/7}\,. \tag{13}$$

Die Integrale sind im Sinne des *Cauchy*schen Hauptwertes zu nehmen. Für die Integrationsveränderliche haben wir x statt x' geschrieben, da Verwechslungen ausgeschlossen sind. Wie wir aus (13) sofort ersehen, ändert sich der Widerstand linear mit der Profildicke.

Für das Profil verschwindender Dicke ($y=0$, ebene Platte) erhält man aus (13) sofort

$$\frac{c_w}{2} = c_{f_l}\,x_u^{1/2} + c_{f_t}(1-x_u)^{6/7}\,. \tag{14}$$

Zum Vergleich geben wir noch die Widerstandsformel der ebenen Platte an, die man gewinnt, wenn man die oben gemachte Linearisierung nicht vornimmt.

$$\frac{c_w}{2} = \left[c_{f_l}^{7/6}\,x_u^{7/12} + c_{f_t}^{7/6}(1-x_u)\right]^{6/7}\,. \tag{15}$$

In Abb. 3 haben wir die Kurven $c_w/2c_{f_t}$ nach den Formeln (14) und (15) für die beiden *Reynolds*schen Zahlen $Re = 10^6$ ($c_{f_t} = 0{,}0045$) und $Re = 10^8$ ($c_{f_t} = 0{,}0021$) dargestellt. Wenn man beachtet, daß man die Lage des Umschlagspunktes nicht sehr genau kennt, so kommt den Unterschieden der beiden Formeln bei den technisch vorkommenden *Reynolds*schen Zahlen (Flugzeuge $Re \approx 2.10^7$) keine große Bedeutung zu. Die Widerstandsdifferenzen nach beiden Formeln sind nicht größer als diejenigen infolge einer geringen Verschiebung des Umschlagspunktes, und zwar $\Delta x_u = 0{,}08$ bei $Re = 10^6$ und $\Delta x_u = 0{,}02$ bei $Re = 10^8$.

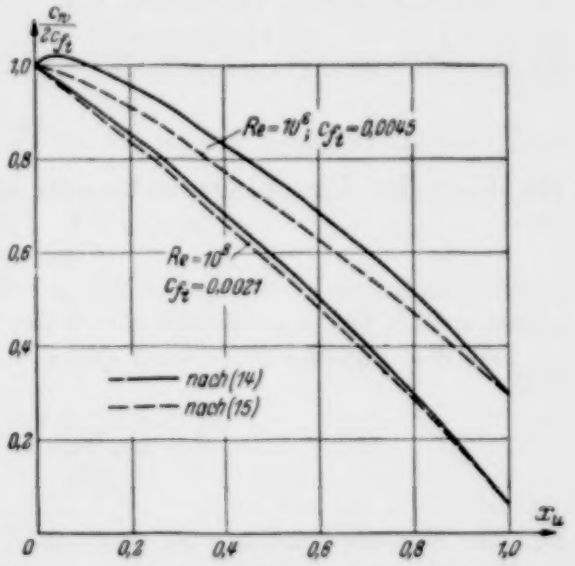

Abb. 3. Die Widerstandsbeiwerte der längsangeströmten ebenen Platte in Abhängigkeit von der Umschlagspunktlage.

[1] Siehe Fußnote 6 auf Seite 176.

Bei voll-turbulenter Strömung ergibt sich aus (13) mit $x_u = 0$

$$\frac{c_w}{2} = c_{f_t}\left[1 + \frac{20}{7\pi}\int_0^1 \frac{y(x)}{x(1-x)}\,dx\right]. \tag{16}$$

Wir wollen jetzt (13), ähnlich wie es *E. Truckenbrodt*[1] schon bei der Berechnung der potentialtheoretischen Profileigenschaften getan hat, in eine Summenformel umformen, in der außer ein für allemal berechneten Konstanten nur noch die Profilordinaten an bestimmten Stellen der Sehne vorkommen.

Nach dem Vorschlag von *F. Riegels*[2] beschreiben wir den Profiltropfen durch den Reihenansatz

$$y = \frac{1}{2}\sum_1 b_\nu \sin \nu\varphi\,. \tag{17}$$

Zwischen φ und x besteht dabei der Zusammenhang

$$x = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)\,. \tag{18}$$

Führen wir den Ausdruck

$$J = \frac{1}{\pi}\oint_0^1 \frac{y(x)}{x_u - x}\,dx = \frac{1}{\pi}\oint_0^\pi y(\varphi)\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi_u - \cos\varphi}\,d\varphi \tag{19}$$

ein, dann können wir für (13) auch schreiben

$$\frac{c_w}{2} = c_{f_l}\left[1 + \frac{5}{2}\,\frac{J(x_u) - J(x_u = 0)}{x_u}\right]x_u^{1/2} + c_{f_t}\left[1 + \frac{20}{7}\,\frac{J(x_u = 1) - J(x_u)}{1 - x_u}\right](1 - x_u)^{6/7}. \tag{20}$$

Setzen wir (17) in (19) ein, dann folgt nach einer bekannten Formel von *H. Glauert*[3]

$$J = \frac{1}{2}\sum_1 b_\nu \cos\nu\varphi_u\,. \tag{21}$$

Nehmen wir jetzt zur Beschreibung des Profiltropfens nach (17) eine endliche Reihe $\nu \leq N$ an, dann sind die Koeffizienten durch die *Besselschen* Formeln (vgl. Hütte 27. Aufl. S. 208) folgendermaßen bestimmt:

$$b_\nu = \frac{4}{N}\sum_{m=1}^{N-1}{}' \sin\nu\frac{\pi m}{N}\,y_m\,. \tag{22}$$

Es bedeuten $y_m = (y^{(t)}/l)(x_m)$ die Ordinatenwerte des Profiltropfens an den Stellen

$$x_m = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi m}{N}\right). \tag{23}$$

Die Lage des Umschlagspunktes ist gegeben durch

$$x_u \equiv x_n = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi n}{N}\right), \tag{24}$$

wobei $n = N$ für $x_u = 0$ und $n = 0$ für $x_u = 1$ gilt.

Für die Summe (21) wird dann

$$J = \frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N-1}{}' \frac{1 - (-1)^{m+n}}{2}\,\frac{\sin\dfrac{\pi m}{N}}{\cos\dfrac{\pi n}{N} - \cos\dfrac{\pi m}{N}}\,y_m\,. \tag{25}$$

Bei der Summenbildung ist das Glied $m = n$ auszulassen.

Den Ausdruck (25) setzen wir in (20) ein und können schreiben

$$\frac{c_w}{2} = c_{f_l}\left(P_n + \sum_{m=1}^{N-1} P_{mn}\cdot 2\,y_m\right) + c_{f_t}\left(Q_n + \sum_{m=1}^{N-1} Q_{mn}\cdot 2y_m\right). \tag{26}$$

---

[1] *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 324.
[2] Siehe Fußnote 6 auf Seite 176.
[3] *H. Glauert*, Tragflügel- und Luftschraubentheorie, S. 82. Berlin (1929).

Hierin gelten für die Konstanten die folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} P_n &= \left[\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi n}{N}\right)\right]^{1/2}, \qquad Q_n = \left[\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi n}{N}\right)\right]^{6/7}, \\ P_{mn} &= \frac{5}{4N}\left(\frac{2}{1+\cos\frac{\pi n}{N}}\right)^{1/2}\left[\left(1-(-1)^{N+m}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi m}{2N}+\frac{1-(-1)^{m+n}}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi(m+n)}{2N}+\operatorname{ctg}\frac{\pi(m-n)}{2N}\right)\right], \\ Q_{mn} &= \frac{10}{7N}\left(\frac{2}{1-\cos\frac{\pi n}{N}}\right)^{1/7}\left[\left(1-(-1)^{m}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{2N}-\frac{1-(-1)^{m+n}}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi(m+n)}{2N}+\operatorname{ctg}\frac{\pi(m-n)}{2N}\right)\right], \\ P_{nn} &= Q_{nn} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Diese Konstanten sind für $N=12$ für verschiedene Lagen des Umschlagspunktes berechnet worden und sind in Tabelle 1 mitgeteilt.

Tabelle 1. *Die Konstanten in der Widerstandsformel* (26) *für* $N = 12$

x_u		0		0,0670		0,25		0,50		0,75		1,00	
n		12		10		8		6		4		0	
		P_n	Q_n	P_n	Q_n	P_n	Q_n	P_n	Q_n	P_n	Q_n	P_n	Q_n
		0	1,0000	0,2588	0,9423	0,5000	0,7814	0,7071	0,5521	0,8660	0,3047	1,0000	0
m	x_m	P_{mn}	Q_{mn}	P_{mn}	Q_{mn}	P_{mn}	Q_{mn}	P_{mn}	Q_{mn}	P_{mn}	Q_{mn}	P_{mn}	Q_{mn}
1	0,9830	0	1,8399	−0,0078	1,8606	−0,0187	1,9280	−0,0402	2,0675	−0,1020	2,3655	1,6099	0
3	0,8536	0	0,6734	−0,0284	0,6887	−0,0715	0,7442	−0,1726	0,8977	−0,7217	1,6914	0,5893	0
5	0,6294	0	0,4930	−0,0736	0,5199	−0,2107	0,6390	−0,8735	1,3239	1,1480	−0,7840	0,4314	0
7	0,3706	0	0,4930	−0,2314	0,5671	−1,1257	1,1838	1,4835	−0,7795	0,6197	−0,1467	0,4314	0
9	0,1465	0	0,6734	−1.6383	1,1696	2,4285	−0,7442	1,0059	−0,1540	0,7217	−0,0498	0,5893	0
11	0,0170	0	1,8399	8,1995	−0,5914	3,3963	−0,1051	2,3168	−0,0358	1,8697	−0,0130	1,6099	0

Die Berechnung des Profilwiderstandes geht nun folgendermaßen vor sich: Gegeben sind die *Reynolds*sche Zahl $Re = U_\infty l/\nu$, die Lage des Umschlagspunktes $x_u = x_u/l$ und die Profilkontur $y = y^{(1)}/l$. Aus der *Reynolds*schen Zahl und gegebenenfalls der Rauhigkeit der Profiloberfläche bestimmt man die Widerstandsbeiwerte der mit der Geschwindigkeit U_∞ längsangeströmten ebenen Platte von der Länge l bei voll-laminarer und voll-turbulenter Strömung, c_{f_l} und c_{f_t}. Ist die Profilkontur durch einen einfachen analytischen Ausdruck gegeben, so kann man versuchen, den Widerstandsbeiwert nach (13) analytisch zu berechnen. Für andere Profilformen wendet man die Summenformel (26) an. Man berechnet durch Bildung der Produktsummen die Widerstandsbeiwerte für einige Umschlagspunktlagen. Das Ergebnis trägt man über x_u auf und ermittelt den gesuchten Widerstandsbeiwert bei der gegebenen Umschlagspunktlage.

4. Beispiele. a) Joukowski-Profil. Die linearisierte Form des symmetrischen *Joukowski*-Profils lautet:

$$y = 2\varepsilon(1-x)\sqrt{x(1-x)} = \frac{\varepsilon}{2}\sin\varphi\,(1-\cos\varphi)\,. \tag{28}$$

Zwischen der größten Dicke $t = t/l$, die sich an der Stelle $x_t = 0{,}25$ befindet, und der Größe ε besteht der Zusammenhang

$$\varepsilon = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,t = 0{,}7698\,\mathrm{t}\,. \tag{29}$$

Die *Fourier*schen Koeffizienten in (17) bestimmen wir sofort zu

$$b_1 = \varepsilon \quad \text{und} \quad b_2 = -\frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{30}$$

Weiter ergibt sich nach (21) unter Beachtung von (18)

$$J = -\varepsilon\left(\frac{3}{4} - 3x_u + 2x_u^2\right). \tag{31}$$

Wir setzen sämtliche Beziehungen in (20) ein und erhalten

$$\frac{c_w}{2} = c_{f_l}\left[1+1{,}924\,(3-2x_u)\,t\right]x_u^{1/2} + c_{f_t}\left[1+2{,}199\,(1-2x_u)\,t\right](1-x_u)^{6/7}\,. \tag{32}$$

Für ein 15% dickes Profil ($t = 0{,}15$) haben wir in Abb. 4 die laminaren und turbulenten Widerstandsanteile in der Form $(\Delta c_w/2c_f)_l$ und $(\Delta c_w/2c_f)_t$ über der Lage des Umschlagspunktes x_u dargestellt. Das Ergebnis entspricht der Lösung der Gleichungen (13) und (26). Zum Vergleich haben wir auch die Kurven eingetragen, die sich nach (9) durch graphische Integrationen der potenzierten Geschwindigkeitsverteilung über der Bogenlänge ergeben. Die Übereinstimmung mit den aus den linearisierten Formeln gefundenen Kurven ist gut. In Abb. 5 haben wir ausgehend von diesen Ergebnissen die Kurven $c_w/2c_{f_l}$ über der Lage des Umschlagspunktes für die beiden *Reynolds*schen Zahlen $Re = 10^6$ und $Re = 10^8$ aufgetragen.

b) Ellipsen-Profil. Die Form des Ellipsen-Profils ist gegeben durch

$$y = t\sqrt{x(1-x)} = \frac{t}{2}\sin\varphi\,. \tag{33}$$

Mit $b_1 = t$ und $J = \frac{t}{2}(2x_u - 1)$ erhält man nach (20)

$$\frac{c_w}{2} = c_{f_l}(1 + 2{,}500\,t)\,x_u^{1/2} + c_{f_t}(1 + 2{,}857\,t)\,(1-x_u)^{6/7}\,. \tag{34}$$

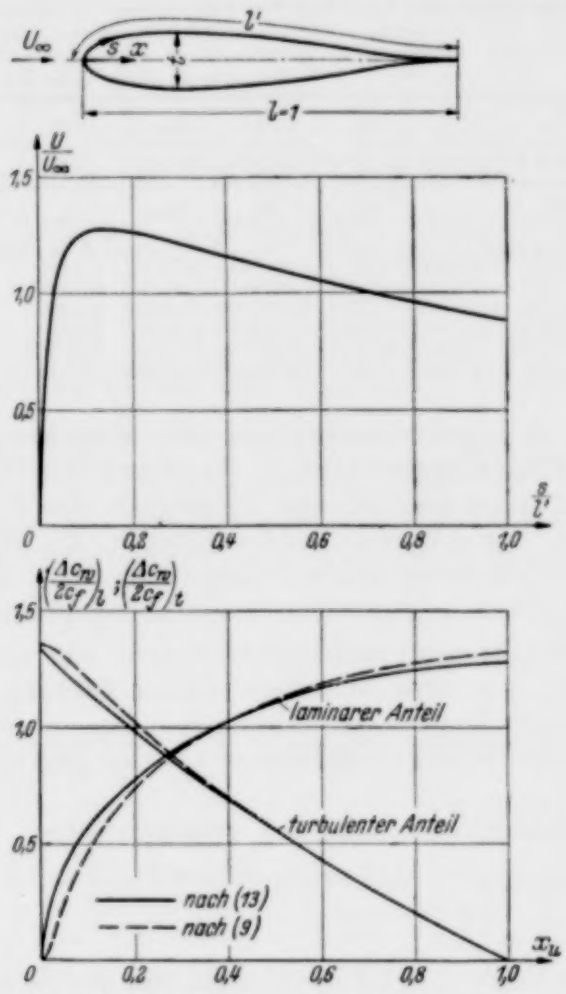

Abb. 4. *Joukowski*-Profil, $t = 0{,}15$, Geschwindigkeitsverteilung und Widerstandsanteile in Abhängigkeit von der Umschlagspunktlage.

Interessant an dieser Formel ist, daß sie in bezug auf die Abhängigkeit von der Lage des Umschlagspunktes derjenigen der ebenen Platte (14) entspricht. Die Anwendbarkeit der Formel (34), die ja nur für den Fall anliegender Strömung gilt, ist dadurch stark eingeschränkt, daß bei dem vorgegebenen elliptischen Profil

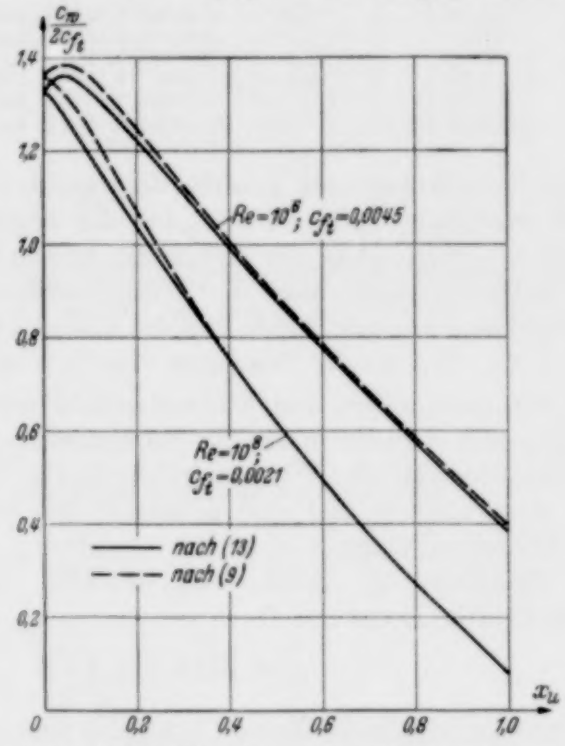

Abb. 5. *Joukowski*-Profil, $t = 0{,}15$, Widerstandsbeiwerte in Abhängigkeit von der Umschlagspunktlage bei verschiedenen *Reynolds*schen Zahlen.

im hinteren Teil des Profils gewöhnlich bereits abgelöste Strömung herrscht. Die Widerstände werden also bei schon relativ kleinen Profildicken erheblich größer sein als die Werte, die man nach (34) errechnet.

c) Abgeändertes Ellipsen-Profil. Durch den Ansatz

$$y = a\frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+bx} \tag{35}$$

$$\text{mit}\quad a = t\sqrt{\frac{1-x_t}{x_t}}\quad\text{und}\quad b = \frac{1-2x_t}{x_t} \tag{36}$$

können wir das eben behandelte Ellipsen-Profil so abändern, daß wir Profile mit veränderlicher Dickenrücklage x_t erzeugen können. In Abb. 6 haben wir einige Profile dargestellt. Diese Profile sind im Bereich $0{,}191 < x_t < 0{,}809$ wendepunktfrei.

Die Berechnung des Widerstandsbeiwertes wollen wir für den Fall vollturbulenter Strömung durchführen, indem wir (35) in (16) einsetzen. Zweckmäßig führt man dabei zur einfachen Ausführung der Integration Polarkoordinaten nach (18) ein. Man erhält nach kleiner Zwischenrechnung

$$\frac{c_w}{2} = c_{f_t}\,(1 + 2{,}857\,t)\,. \tag{37}$$

Es ergibt sich das bemerkenswerte Ergebnis, daß bei den abgeänderten Ellipsenprofilen der Widerstandsbeiwert bei voll-turbulenter Strömung nur von der Profildicke t, dagegen aber nicht von der Dickenrücklage x_t, abhängt. Auch bei diesen Profilen wird schon bei kleineren Profildicken im Profilhinterteil Ablösung eintreten.

d) Abgeändertes Parabel-Profil. Von *E. Truckenbrodt*[1] wurde bereits an anderer Stelle

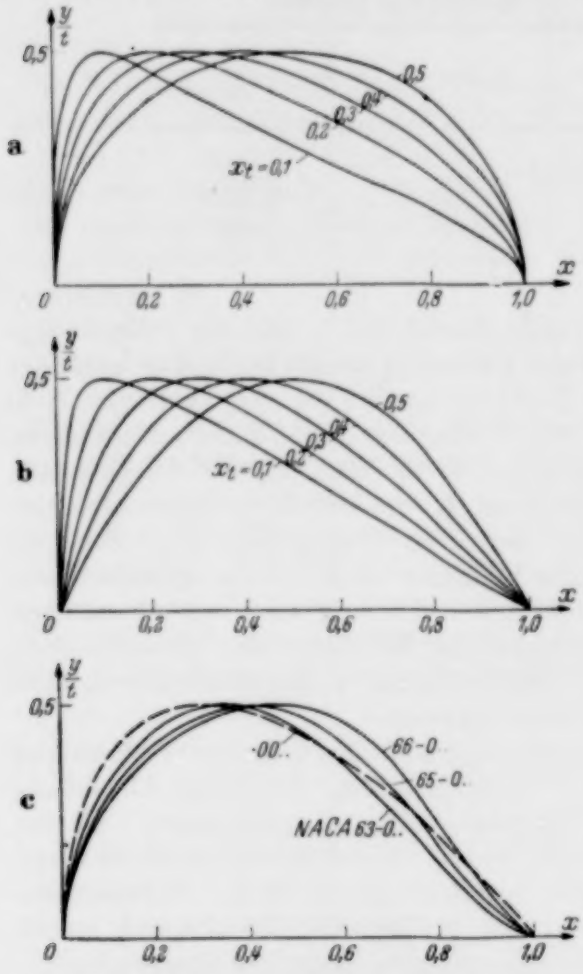

Abb. 6. Ordinaten verschiedener Profilformen. a) Abgeänderte Ellipsen-Profile, b) Abgeänderte Parabel-Profile, c) NACA-Profile

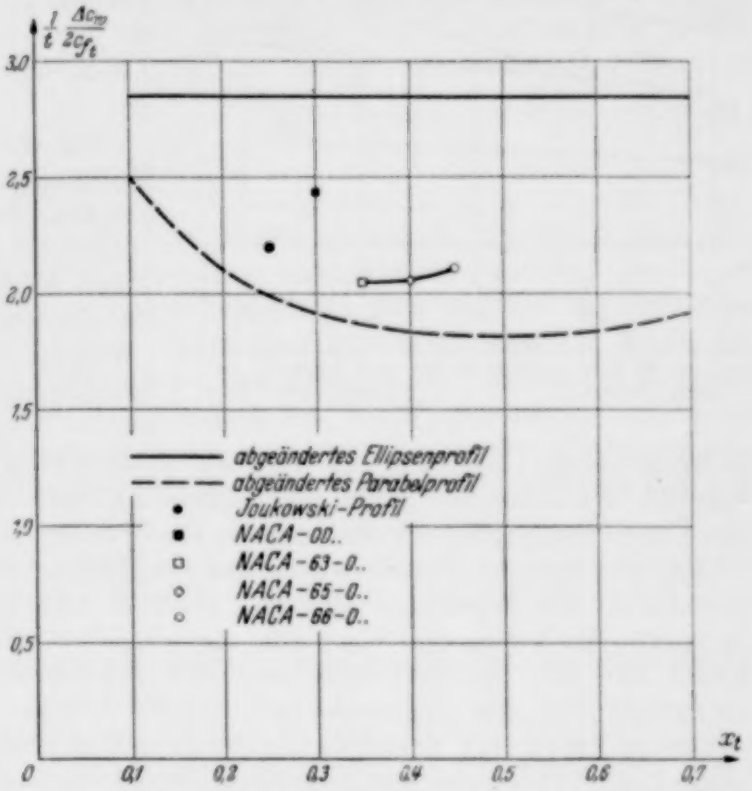

Abb. 7. Die Widerstandsänderungen infolge der Verdrängungswirkung des Profiltropfens bei voll-turbulenter Strömung.

ein symmetrischer Profiltropfen mit veränderlicher Dickenrücklage aus dem bekannten Parabelzweieck in folgender Form angegeben:

$$y = c\,\frac{x\,(1-x)}{1+dx} \tag{38}$$

$$\text{mit}\quad c = \frac{1}{2}\,\frac{t}{x_t^2}\quad\text{und}\quad d = \frac{1-2x_t}{x_t^2}\,. \tag{39}$$

Die Profile sind im ganzen Bereich $0 < x_t < 1$ wendepunktfrei. An der Vorder- und Hinterkante laufen die Profile jeweils in eine spitze Kante aus. In Abb. 6 sind einige Profile dargestellt.

Setzen wie (38) in (16) ein, so läßt sich die Integration sehr einfach ausführen. Für den Widerstandsbeiwert bei vollturbulenter Strömung erhält man dann

$$\frac{c_w}{2} = c_{f_t}\left[1 + \frac{0{,}909}{1-2x_t}\ln\left(\frac{1-x_t}{x_t}\right)t\right]. \tag{40}$$

Für das Parabelzweieck, $x_t = 0{,}5$, folgt hieraus:

$$\frac{c_w}{2} = c_{f_t}\,(1 + 1{,}819\,t)\,. \tag{41}$$

[1] Siehe Fußnote 1 auf Seite 180.

In Abb. 7 haben wir die Widerstandsänderung durch den eben beschriebenen Profiltropfen gegenüber der längsangeströmten ebenen Platte in der Form $1/t \cdot \Delta c_w / 2 c_{f_t}$ über der Lage der größten Dicke x_t aufgetragen.

e) NACA-Profile. Für die in Tabelle 2 angegebenen NACA-Profile wurden die Widerstandsbeiwerte mittels der Summenformel (26) ermittelt.

Die Profilordinaten wurden dem NACA-Report Nr. 824 entnommen und sind in Abb. 6 dargestellt.

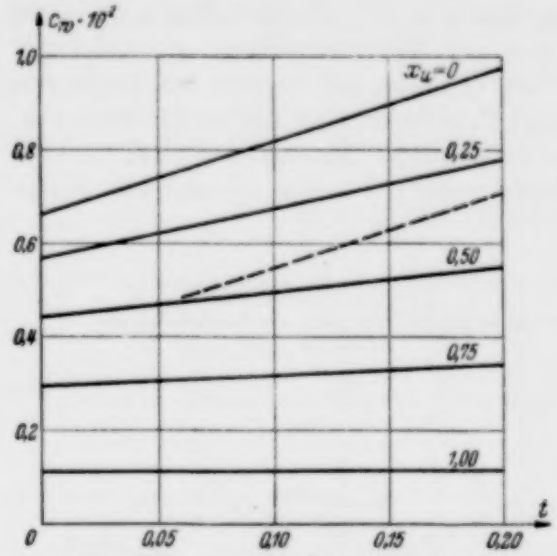

Abb. 8. Die Widerstandsbeiwerte der Profile NACA-00.. bei der Re-Zahl $6 \cdot 10^6$ und bei verschiedenen Umschlagspunktlagen. — — — — Messung nach NACA-Report Nr. 824.

Tabelle 2. *Die Widerstandsänderungen bei NACA-Profilen.*

Profil	$\frac{1}{t} \frac{\Delta c_w}{2 c_{f_t}}$
NACA—00. .	2,437
63—0 . .	2,051
65—0 . .	2,063
66—0 . .	2,113

Für die Profile NACA 00. . ist eine vollständige Rechnung für alle Umschlagspunktlagen durchgeführt worden. Das Ergebnis ist für die *Reynolds*sche Zahl $Re = 6.10^6$ in Abb. 8 über der Profildicke aufgetragen. Zum Vergleich ist auch die dem NACA-Report Nr. 824 entnommene Kurve der Messungen mit eingetragen. Da die Umschlagspunktlagen für die Messungen nicht bekannt sind, ist ein genauer Vergleich zwischen der Rechnung und den Messungen nicht möglich. Daß der Anstieg der Meßkurve stärker ist als derjenige der theoretischen Kurven bei konstant gehaltener Umschlagspunktlage dürfte damit zusammenhängen, daß der Umschlagspunkt mit wachsender Profildicke nach vorn wandert.

Für die anderen Profile wurde nur die Widerstandsänderung bei voll-turbulenter Strömung berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 und Abb. 7 wiedergegeben. In dieser Abbildung ist auch der konstante Wert für die abgeänderten Ellipsen-Profile eingezeichnet. Unsere Werte für die NACA-Profile und das *Joukowski*-Profil liegen zwischen dieser Kurve und derjenigen für die abgeänderten Parabel-Profile. Die mittlere prozentuale Widerstandserhöhung durch die Verdrängungswirkung des Profiltropfens beträgt für die neueren amerikanischen Profile etwa den doppelten Betrag des prozentualen Profildickenverhältnisses[1].

5. Der Einfluß einer Profilwölbung. Im folgenden wollen wir noch den Einfluß einer Profilwölbung auf den Widerstandsbeiwert abschätzen. Wir machen unsere Überlegungen am Beispiel der voll-turbulenten Strömung, $x_u = 0$. Wir gehen von der Widerstandsformel (9) aus, die wir näherungsweise wie folgt schreiben[2]:

$$c_w = c_{f_t} \int_0^1 \left[\left(\frac{U}{U_\infty} \right)_0^3 + \left(\frac{U}{U_\infty} \right)_u^3 \right] dx \,. \tag{42}$$

Hierin bedeuten U_0 und U_u die Geschwindigkeitsverteilungen auf der Ober- und Unterseite des Profils. Für die zirkulationsbehaftete Umströmung des Profils können wir schreiben

$$\frac{U}{U_\infty} = \left(\frac{U}{U_\infty} \right)_t \pm \left(\frac{U}{U_\infty} \right)_s . \tag{43}$$

Es sind U_t die bereits behandelten Verdrängungsgeschwindigkeiten des Profiltropfens und U_s die Geschwindigkeiten, die durch die Skelettlinienwölbung entstehen. Das obere Vorzeichen gilt für die Profiloberseite und das untere entsprechend für die Profilunterseite. Wir setzen

[1] *N. Scholz* (vgl. Fußnote 4 auf Seite 176) findet auf Grund seiner Beispielrechnungen etwa den 2,4-fachen Betrag des prozentualen Dickenverhältnisses für die prozentuale Widerstandserhöhung infolge des Profiltropfens.

[2] Die Vereinfachung besteht darin, daß wir in der Formel für die Impulsverlustdicke (7) $n = 0$ gesetzt haben.

(43) in (42) ein und erhalten die Widerstandsänderung infolge der Profilwölbung zu

$$\Delta c_w = 6\, c_{f_t} \int_0^1 \left(\frac{U}{U_\infty}\right)_t \left(\frac{U}{U_\infty}\right)_s^2 dx\,. \tag{44}$$

Für nicht allzu dicke Profile können wir den Einfluß der Verdrängungsgeschwindigkeit des Profiltropfens vernachlässigen. Wir setzen also $(U/U_\infty)_t \approx 1$. Dann wird aus (44)

$$\frac{\Delta c_w}{2\, c_{f_t}} = 3 \int_0^1 \left(\frac{U}{U_\infty}\right)_s^2 dx\,. \tag{45}$$

Die Widerstandsänderung wächst, da die Geschwindigkeiten U_s proportional der Wölbungshöhe sind, mit dem Quadrat der Wölbungshöhe.

Ehe wir jetzt für einige spezielle Skelettlinienformen (45) auswerten, müssen wir zunächst noch den Anstellwinkel festlegen, bei dem wir die Widerstandsänderung berechnen wollen. Die zusätzlichen Geschwindigkeiten, die durch eine Anstellung des Skelett-Profils (Profil verschwindender Dicke) entstehen, ergeben sich aus der ersten *Birnbaum*schen Normalverteilung zu

$$\left(\frac{\Delta U}{U_\infty}\right)_s = (\alpha - \alpha_s) \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,. \tag{46}$$

Würde man hiermit in (45) hereingehen und die Integration ausführen, so erhält man eine unendlich große Widerstandserhöhung. Es gibt aber einen Anstellwinkel, bei dem der Anteil nach (46) verschwindet, $\alpha = \alpha_s$. Diesen Anstellwinkel bezeichnet man als den des stoßfreien Eintritts. Für ihn ergibt sich an der Profilvorderkante ($x = 0$) keine unendlich große Geschwindigkeit, wie sie sich sonst nach (46) errechnet. Der Zustand des stoßfreien Eintritts stellt also das Widerstandsminimum dar. Die Berechnung des Anstellwinkels des stoßfreien Eintritts bzw. des zugeordneten Auftriebsbeiwertes kann man in bequemer Weise mit den von *E. Truckenbrodt*[1] angegebenen Formeln durchführen. Für den Auftriebsbeiwert gilt z. B.

$$c_{a_s} = \int_0^1 \frac{y^{(s)}}{\sqrt{x\,(1-x)^3}}\, dx\,. \tag{47}$$

Für drei Beispiele wollen wir die Widerstandserhöhung infolge der Skelettlinienwölbung bestimmen.

a) Die neueren NACA-Profile (6-Serie) (vgl. NACA-Report Nr. 824) besitzen Skelettlinien, die aus einer vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung errechnet worden sind. Dabei wurde angenommen, daß die Geschwindigkeiten im vorderen Teil des Profils ($0 \leq x \leq a$) konstant verlaufen und im hinteren Teil ($a \leq x \leq 1$) linear bis auf den Wert null abnehmen.

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x \leq a\colon\ & \left(\frac{U}{U_\infty}\right)_s = \frac{c_{a_s}}{2\,(1+a)} \\ a \leq x \leq 1\colon\ & \left(\frac{U}{U_\infty}\right)_s = \frac{c_{a_s}}{2\,(1-a^2)}\,(1-x)\,. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Einige hieraus sich ergebende Skelettlinienformen sind in Abb. 9 dargestellt. Für die größte Wölbungshöhe gilt etwa $f = (0{,}055 \div 0{,}077)\, c_{a_s}$. Wir setzen (48) in (45) ein und finden für die Widerstandsänderung

$$\frac{\Delta c_w}{2 c_{f_t}} = \frac{1}{4}\,\frac{1+2a}{(1+a)^2}\, c_{a_s}^2\,. \tag{49}$$

In Abb. 9 haben wir dieses Ergebnis über a aufgetragen. Bei konstanter Geschwindigkeitsverteilung längs der ganzen Profiltiefe ($a = 1$) wird $\Delta c_w / 2\, c_{f_t} = 0{,}188\, c_{a_s}^2$. Nimmt man den Auftriebsbeiwert des stoßfreien Eintritts mit $c_{a_s} = 0{,}4$ an, dann ergibt sich eine Widerstandserhöhung infolge der Wölbung von etwa 3%. Allgemein kann man sagen, daß die Profilwölbung nur unwesentliche Widerstandserhöhungen mit sich bringt, ein Ergebnis, das auch durch die im NACA-Report Nr. 824 mitgeteilten Meßergebnisse gut bestätigt wird.

---

[1] Siehe Fußnote 1 auf Seite 180.

b) Das bekannte Parabel-Skelett

$$y = \frac{c_{a_s}}{\pi} x(1-x) \tag{50}$$

hat entsprechend der zweiten *Birnbaum*schen Normalverteilung eine elliptische Geschwindigkeitsverteilung

$$\left(\frac{U}{U_\infty}\right)_s = c_{a_s} \frac{2}{\pi} \sqrt{x(1-x)}\,. \tag{51}$$

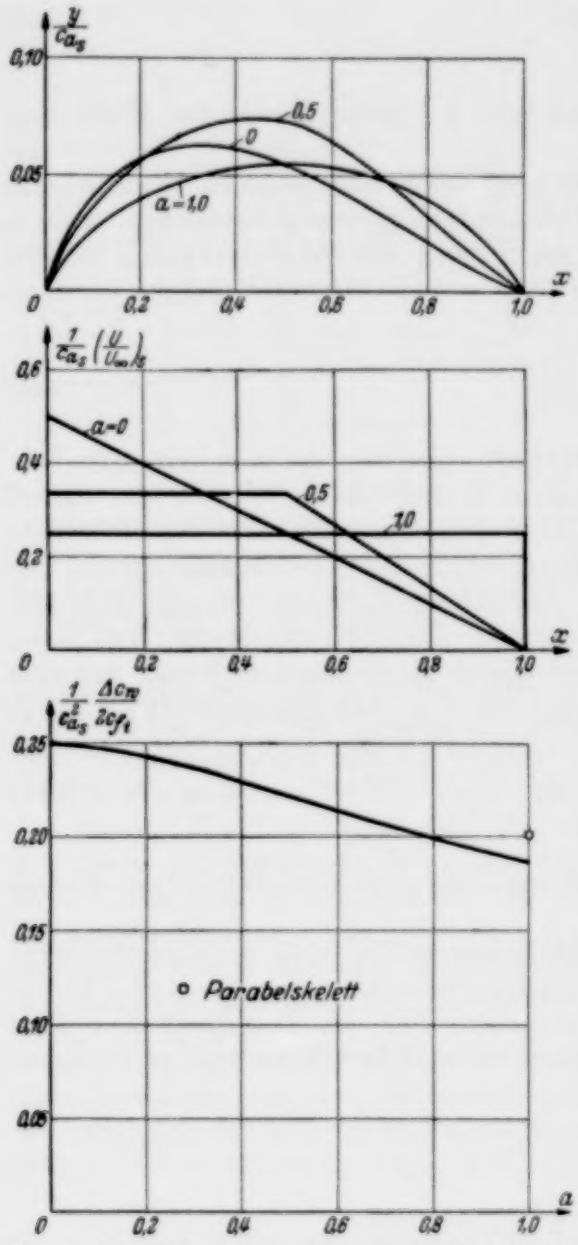

Abb. 9. Die Widerstandsänderungen infolge Profilwölbung bei voll-turbulenter Strömung. Skelett-Linie nach NACA-Report Nr. 824.

Hiermit ergibt sich die Widerstandserhöhung zu

$$\frac{\Delta c_w}{2 c_{f_t}} = \frac{2}{\pi^2} c_{a_s}^2\,. \tag{52}$$

Dieses ist etwa derselbe Wert wie für die Skelettlinie mit konstanter Geschwindigkeitsverteilung. Die Wölbungshöhe ist jedoch beim Parabel-Skelett um 45% größer als bei dem Skelett mit konstanter Geschwindigkeitsverteilung.

c) Eine S-Schlag-Skelettlinie ergibt sich in bekannter Weise aus

$$y = c_{m_0} \frac{16}{3\pi} x(1-x)(1-2x)\,. \tag{53}$$

Da für diese Skelettform $c_{a_s} = 0$ ist, haben wir die Skelettlinienordinaten auf den Nullmomentenbeiwert c_{m_0} bezogen. Die Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich aus der dritten *Birnbaum*schen Normalverteilung zu

$$\left(\frac{U}{U_\infty}\right)_s = c_{m_0} \frac{16}{\pi} (1-2x) \sqrt{x(1-x)}\,. \tag{54}$$

Die Widerstandsänderung findet man aus (45) zu

$$\frac{\Delta c_w}{2 c_{f_t}} = \frac{128}{5\pi^2} c_{m_0}^2 = 2{,}59\, c_{m_0}^3\,. \tag{55}$$

Nehmen wir einen Nullmomentenbeiwert von $c_{m_0} = 0{,}1$ an, dann beträgt die Widerstandserhöhung durch den S-Schlag der Skelettlinie auch wieder nur 3%.

6. Zusammenfassung. In die bekannten Verfahren zur Berechnung des Profilwiderstandes schlanker Körper von *Pretsch* und *Squire-Young* werden die neuesten Ergebnisse der Reibungsschichtforschung eingeführt. Die neue Formel wird so umgeformt, daß die darin vorkommende Geschwindigkeitsverteilung um den Körper für den Fall der zirkulationsfreien Umströmung durch die Ordinaten des Profiltropfens ausgedrückt wird. Die Reibungsschichteinflüsse gehen inform der laminaren und turbulenten Widerstandsbeiwerte der mit der Anströmungsgeschwindigkeit längsangeströmten ebenen Platte von der Länge des Profils ein. Die Profiloberfläche kann dabei glatt oder rauh sein. Es werden einfache Quadratur- und Summenformeln gewonnen, mit denen die Widerstandsbeiwerte bei veränderlicher Umschlagspunktlage für eine beliebig vorgegebene Profiltropfenform leicht und schnell ermittelt werden können. An Beispielen werden die Formeln erprobt. Die Widerstandserhöhung infolge der Verdrängungswirkung des Profiltropfens ist proportional der Profildicke. Sie beträgt bei voll-turbulenter Strömung prozentual etwa den doppelten Betrag des prozentualen Profildickenverhältnisses. Der Einfluß einer Skelettlinienwölbung wird abgeschätzt. Er ist bei den üblichen Wölbungshöhen nur gering.

(Eingegangen am 15. Oktober 1952.)

Anschrift des Verfassers: Priv.-Doz. Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*, Braunschweig, Körnerstr. 12.

Zur Systematik des plastischen Momenten- und Spannungsausgleichs in Stabwerken unter Biegung.

Von H. Craemer.

1. Grundlagen. Wir legen einen ideal-plastischen Baustoff mit dem bekannten Spannungs-Dehnungs-Gesetz

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s}\,\varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leq \varepsilon = \varepsilon_s, \\ \sigma &= \sigma_s \quad \text{für} \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon \leq \infty \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

bei Belastung und

$$\sigma = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s}\,(\varepsilon - \varepsilon_0) \tag{1.2}$$

bei Entlastung zu Grunde; hierin ist σ_s und ε_s Spannung und Dehnung an der Streckgrenze und ε_0 die Restdehnung bei völliger Entlastung nach Erreichen der Streckgrenze. Die Gleichgewichtsbedingungen werden wir am unverformten System ansetzen. Nachdem unter einem Biegemoment M am Querschnittsrand die Plastizierung eingesetzt hat, breitet sich bekanntlich der Vorgang über den ganzen Querschnitt aus, bis das vollplastische Moment

$$M_s = \sigma_s S \tag{1.3}$$

erreicht ist; dabei ist S die Summe der statischen Momente der Querschnittsteile beiderseits der Flächenhalbierenden um diese. Es tritt also ein Spannungsausgleich im Querschnitt ein.

Mehr Beachtung als dieser hat der Momentenausgleich gefunden; er tritt in statisch unbestimmten Balkentragwerken auf, falls S konstant ist und kommt dadurch zustande, daß durch Fließen von Querschnittsteilen der Verformungswiderstand dort abnimmt, so daß eine Neuverteilung der Momente gegenüber den elastostatischen Werten eintritt. Die Höchstlast $P = P_s$ des Tragwerks ist erreicht, wenn durch volle Plastizierung sich Fließgelenke mit abwechselndem Drehsinn in solcher Zahl gebildet haben, daß das Tragwerk oder Teile desselben beweglich werden.

In vielen Anwendungen des Stahlbaus und fast immer im Stahlbeton ist aber S keine Konstante. Der Vorgang ist dann an sich derselbe wie oben für den Momentenausgleich beschrieben, jedoch gleichen sich dabei nicht die Momente, sondern nur die Biegespannungen aus; man wird also auf den Oberbegriff des Spannungsausgleichs im Tragwerk geführt, der sowohl auf konstantes wie variables S anwendbar ist. Bei statisch bestimmten Systemen tritt ebenfalls dieser Spannungsausgleich ein; er ist aber nicht von einer Umlagerung der Momente begleitet, sondern gleichbedeutend mit dem Spannungsausgleich innerhalb der meistbeanspruchten Schnitte.

Zur Darstellung ziehen wir späterhin die folgenden dimensionslosen, als Ausnutzung bezeichneten Größen

$$\mu = \frac{\sigma}{\sigma_s}, \quad \nu = \frac{M}{M_s}, \quad \omega = \frac{P}{P_s}, \quad \varrho = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} \tag{1.4}$$

heran. Mit ν_s und ω_s bezeichnen wir die Ausnutzung des betreffenden Systems bei Fließbeginn[1].

2. Besondere Arten des Spannungs- und Momentenausgleichs. Bei den oben bezeichneten drei Arten des Ausgleichs (Spannung im Querschnitt, Momente und Spannungen im Tragwerk) können verschiedene Sonderfälle auftreten. Man kann zunächst die Fälle betrachten, wo der im Endzustand vorhandene Ausgleich bereits im elastischen Zustand besteht und während des Fließens erhalten bleibt. Dies sei als elastischer Ausgleich und der entgegengesetzte Fall als plastischer Ausgleich bezeichnet.

Man kann ferner danach fragen, ob der Ausgleich sich auf sämtliche Elemente des betrachteten Systems oder nur auf Teile desselben erstreckt; im ersten Falle werden wir von kon-

[1] *H. Craemer*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 129.

tinuierlichem Ausgleich, andernfalls von örtlichem Ausgleich sprechen. Unter Elementen sind dabei zu verstehen: beim Spannungsausgleich eines Querschnitts seine Flächendifferentiale, beim Momentenausgleich die Querschnitte des Tragwerks, beim Spannungsausgleich im Tragwerk die Flächendifferentiale seiner sämtlichen Querschnitte.

Bei durchlaufenden Balken auf unbeschränkt tragfähigen Stützen vollzieht sich im allgemeinen der Momenten- oder Spannungsausgleich nur in einem einzigen Felde, indem sich über oder in der Nähe von zwei Stützen (bei Endfeldern: einer Stütze) und im Felde Fließgelenke bilden. Die Nachbarfelder bleiben dabei elastisch und erfahren nur Formänderungen, die gegenüber den plastischen verschwinden; schließen also rechts oder links zwei oder mehr Felder an, so bleiben diese statisch unbestimmt. Diese Art des Ausgleichs sei unvollständiger Ausgleich genannt.

Nur bei ganz spezieller Bemessung des Tragwerks und nur für einen bestimmten aus im allgemeinen mehreren möglichen Belastungsfällen erfolgt der Ausgleich in sämtlichen Feldern gleichzeitig und heiße dann vollständiger Ausgleich. Nur in diesem Sonderfalle ist die wiederholt aufgestellte Behauptung[1] richtig, daß für den Zusammenbruch des n-fach unbestimmten Systems $n+1$ Fließgelenke nötig seien, so daß es vor Bildung des letzten Gelenkes statisch bestimmt wird.

Der unvollständige Ausgleich ist auch bei durchlaufenden Rahmen, die aber hier wegen des Auftretens von Normalkräften nicht behandelt werden, und bei Trägerrosten[2] die Regel. In den späteren Beispielen werden die Begriffe des elastischen, kontinuierlichen usw. Ausgleichs jeweils nur auf ein Feld eines durchlaufenden Balkens bezogen.

3. Spannungsausgleich im Querschnitt. a) Elastischer Spannungsausgleich. Sieht man beim idealen I-Träger davon ab, daß die Spannungen im Flansch mit wachsendem Abstand vom Steg etwas abnehmen, was aber nur für sehr breite Flanschen Bedeutung hat, so erkennt man, daß hier die Spannungsverteilung statisch bestimmt ist und sich infolgedessen während des ganzen Belastungsvorgangs nicht ändern kann. Es liegt also elastischer Ausgleich vor (Abb. 1), und es ist bei Be- oder Entlastung

$$\mu = \nu \quad \text{für} \quad 0 \leq \nu \leq 1 \tag{3.1}$$

und

bzw.

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \nu \quad \text{für} \quad 0 \leq \nu < 1 \\ 1 \leq \varrho &\leq \infty \quad \text{für} \quad \nu = 1. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Bei Entlastung nach Erreichen der Höchstlast ist

$$\varrho = \varrho_0 + \nu, \tag{3.3}$$

wenn ϱ_0 die zu ε_0 gehörige Ausnutzung bezeichnet.

b) Plastischer Spannungsausgleich. Bei jeder anderen Querschnittsform hingegen kann das Moment nur durch Heranziehung der plastischen Eigenschaften voll entwickelt werden: plastischer Ausgleich. Aus dem Verformungsgesetz (1.1) bei Belastung folgt

$$\mu = \varrho \text{ für } \varrho \leq 1; \tag{3.4}$$

die Ausnutzungslinien für Spannung

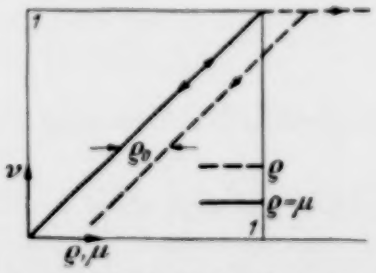

Abb. 1. Ausnutzung bei elastischem Spannungsausgleich im Querschnitt.

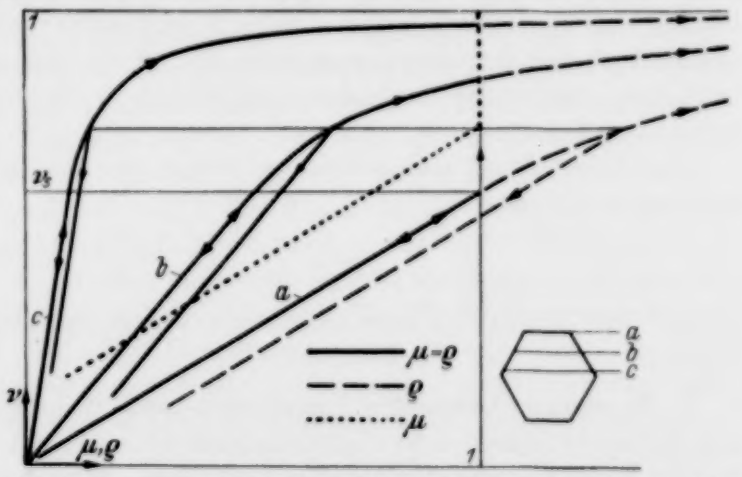

Abb. 2. Ausnutzung bei kontinuierlichem plastischem Spannungsausgleich im Querschnitt.

und Dehnung stimmen also insoweit überein, $f(\mu, \nu) = f(\varrho, \nu)$. Weiter ist für sämtliche Elemente

$$\mu = 1, \quad \varrho = \infty \quad \text{für} \quad \nu = 1, \tag{3.5}$$

[1] *F. Bleich*, Stahlhochbauten, 1. Bd., S. 406, Berlin 1932; *J. F. Baker*, Design of steel frames, Struc. Engr. Okt. 1952; *J. A. van den Broek*, Theory of limit design, S. 32, New York.

[2] *H. Craemer*, Ing.-Arch. 14 (1943), S. 233.

d. h. alle Spannungsausnutzungslinien laufen im Punkt $\mu = \nu = 1$ zusammen und diejenigen für Dehnung haben eine Asymptote in $\nu = 1$. Die Entlastungslinien stimmen mit denen für Belastung überein, solange $\nu \leq \nu_s$ ist; darüber hinaus sind sie den Ästen mit $0 \leq \nu \leq \nu_s$ parallel (siehe Abb. 2).

c) kontinuierlicher Spannungsausgleich. Mit (3.5) ist auch die Frage nach dem Auftreten des kontinuierlichen Ausgleichs beantwortet: er tritt in allen Fällen auf.

4. Momentenausgleich. a) Örtlicher plastischer Momentenausgleich. Dieser Fall kommt am häufigsten vor und ist bekannt.

b) Örtlicher elastischer Momentenausgleich. Das bekannteste Beispiel hierfür ist der voll eingespannte Balken mit konstantem Trägheitsmoment J und einer Einzellast P in der Mitte, also elastostatischen Größtmomenten $M = \pm Pl/8$. Die Ausnutzungsfunktion lautet hier für die voll plastizierten Schnitte a

$$\nu = \pm \omega , \tag{4.1}$$

für alle anderen (b, c) hingegen

$$\nu = k\omega , \quad \text{mit} \quad -1 < k < +1 \tag{4.2}$$

(siehe Abb. 3). Bei Entlastung gelten die gleichen Beziehungen, es bleiben keine Restmomente im Tragwerk zurück. Es gibt eine Reihe anderer Systeme mit elastischem Ausgleich, z. B. den Zweifeldträger, wo er künstlich durch Stützensenkung herbeigeführt wird.

Beim örtlichen, elastischen oder plastischen, Momentenausgleich besteht die aus den plastischen Verformungen allein gewonnene Biegelinie aus geraden Stücken mit unvermitteltem Richtungswechsel in den Fließgelenken. Im Falle der Abb. 3 ist sie also ein Dreieck mit der Spitze in der Mitte.

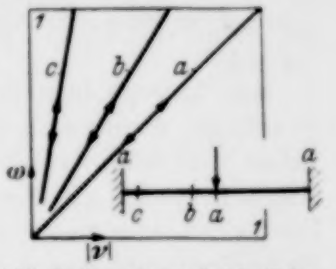

Abb. 3. Ausnutzung bei örtlichem elastischem Momentenausgleich.

c) Kontinuierlicher, plastischer Momentenausgleich. Dieser Fall ist sehr selten. Aus kinematischen Gründen müssen nämlich Gebiete mit positiver und negativer Krümmung abwechseln, beim kontinuierlichen Ausgleich also unmittelbar aneinander anstoßen. Dies ist aber nur möglich bei Belastung durch äußere Momente, z. B. bei dem in Abb. 4 dargestellten beiderseits durchlaufenden Balken, wo vollplastisch $M_a = -M_b$ wird. Ist elastisch $M_a < |M_b|$, was vom Verhältnis c/l und der Steifigkeit und Belastung der anschließenden Felder abhängt, so wird die Ausnutzungslinie wie angegeben; dabei wurde idealer I-Träger angenommen, da nur dann die Ausnutzungslinien stückweise gerade sind.

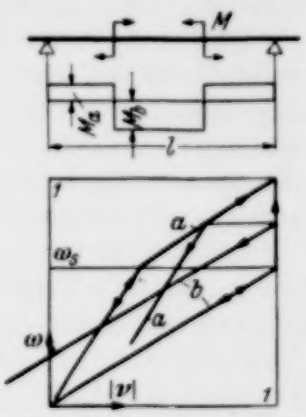

Abb. 4. Kontinuierlicher plastischer Momentenausgleich.

d) Kontinuierlicher elastischer Momentenausgleich. Bei entsprechender Abstimmung von c/l auf das Verhalten der Nachbarfelder, z. B. $c/l = 0{,}5$ und $J = \infty$ in den Anschlußfeldern, wird schon elastisch $M_a = -M_b$, d. h. der Ausgleich ist kontinuierlich elastisch. Die Ausnutzungslinien a und b gehen dann in eine einzige Gerade durch den Ursprung über, und zwar unabhängig von der Querschnittsform.

Die Biegelinie besteht beim kontinuierlichen, plastischen oder elastischen, Ausgleich nur aus gekrümmten Stücken mit wechselnder Krümmung, d. h. aus einer Gelenkkette.

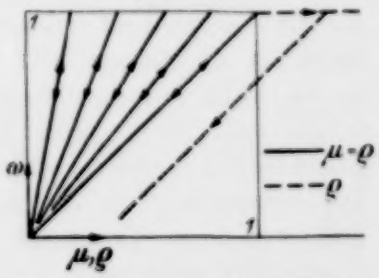

Abb. 5. Ausnutzung bei örtlichem elastischem Spannungsausgleich im Tragwerk.

5. Spannungsausgleich in statisch bestimmten Tragwerken. Wie bekannt, gleichen sich in den meist beanspruchten Schnitten des Tragwerks die Spannungen aus: örtlicher plastischer Ausgleich.

Wählt man die Widerstandsmomente W so, daß in allen Schnitten $M/W = \text{konst.}$, so wird das System traditionell, aber irreführend als Träger gleichen Widerstands bezeichnet, während es richtiger Träger gleicher Spannung, genauer: elastostatisch bestimmter Randspannung, heißen müßte. Statt dessen kann man auch die Bedingung

$$\frac{M}{S} = \text{konst.} \tag{5,1}$$

einführen, die bei wechselnder Querschnittsform nicht mit der vorgenannten identisch ist. Unter der Höchstlast werden dann alle Schnitte gleichzeitig mit σ_s ausgenutzt. Wir haben dann

mit dem kontinuierlichen plastischen Spannungsausgleich im statisch bestimmten Tragwerk zu tun. Da P/M zufolge der statischen Bestimmtheit unveränderlich ist, beeinflussen sich die Querschnitte nicht gegenseitig und die Ausnutzungsfunktion $f(\mu, \omega)$ stimmt mit derjenigen $f(\mu, \nu)$, z. B. in Abb. 2, überein.

Wählt man bei zunächst beliebigem Verlauf von S einen idealen I-Träger, so ist der Querschnitt selbst ebenfalls statisch bestimmt. Alle Linien $f(\mu, \omega)$ sind dann Gerade durch den Ursprung. Falls in zwei oder mehr von ihnen volle Ausnutzung erreicht wird, haben wir mit dem örtlichen elastischen Ausgleich zu tun. Die zugehörigen Ausnutzungslinien sind dann durch Abb. 5 gegeben; in den voll ausgenutzten Schnitten können Restdehnungen, aber keine Restspannungen auftreten.

Der Spannungsausgleich wird ferner kontinuierlich elastisch, wenn außerdem die Bedingung (5.1) erfüllt ist. In Abb. 5 fallen dabei alle Geraden mit $\mu/\omega = \varrho/\omega < 1$ fort.

6. Spannungsausgleich im statisch unbestimmten Tragwerk. a) Örtlicher plastischer Spannungsausgleich. Ist S veränderlich, so wird unter der Höchstlast in den Fließgelenken $M/S = \sigma_s$, wobei M/S ein Extremum gegenüber den Nachbarschnitten bildet; die Untersuchung kann nach einer früheren Arbeit[1] geschehen. Da in den übrigen Querschnitten $\sigma < \sigma_s$ ist, haben wir nur örtlichen Ausgleich.

b) Kontinuierlicher plastischer Spannungsausgleich. Man kann nun, ohne obige Extremalbedingung zu verletzen, die Größen S in den Schnitten zwischen den Fließgelenken solange verringern, bis überall $M/S = \sigma_s$ ist, so daß kontinuierlicher plastischer Ausgleich vorliegt.

Aus kinematischen Gründen wechseln aber positive und negative Momente ab, so daß bei einseitiger (beidseitiger) Kontinuität eines Feldes ein (zwei) Momentennullpunkte auftreten. Beim kontinuierlichen Ausgleich muß dann an diesen Stellen $S = 0$ sein. Dies ist aber nur möglich, wenn gleichzeitig das Trägheitsmoment $J = 0$ ist. Hierdurch nun wird das betr. Feld statisch bestimmt, d. h. ein Ausgleich vollzieht sich nur innerhalb der Querschnitte. Es bedarf wohl kaum des Hinweises, daß $S = 0$ mit Rücksicht auf die Schubspannungen und auf wechselnde Lastfälle praktisch nicht verwirklicht werden kann, sondern nur als lehrreicher theoretischer Grenzfall hier herangezogen wurde.

Ist S unbekannt, d. h. soll das Tragwerk bemessen werden, so kann bekanntlich in einem durchlaufenden Balken die Schlußlinie im Rahmen der kinematischen Bedingungen beliebig angenommen werden. Bemißt man dann in der kinematisch notwendigen Zahl von Querschnitten nach $S = M/\sigma_s$, so erreicht man für den betreffenden Lastfall den vollständigen plastischen Spannungsausgleich; tut man dasselbe in allen Schnitten, so ist der Ausgleich außerdem kontinuierlich.

c) Kontinuierlicher elastischer Spannungsausgleich. Dieser besteht, wenn man einen idealen I-Träger als Querschnitt wählt, da dann auch innerhalb der Querschnitte keine Neuverteilung möglich ist.

d) Örtlicher elastischer Spannungsausgleich. Derselbe kann auftreten, wenn bei Verwendung idealer I-Träger die Größen S auf Steifigkeit und Belastung des ganzen Systems entsprechend abgestimmt werden, vgl. auch das unter 4b Gesagte.

7. Zusammenfassung der Ergebnisse. Der Spannungsausgleich im Querschnitt ist stets kontinuierlich und kann sowohl plastisch wie elastisch sein. Der Momentenausgleich im Tragwerk ist im Normalfalle örtlich plastisch, in Sonderfällen örtlich elastisch; die an sich denkbaren Fälle des kontinuierlichen, plastischen oder elastischen, Ausgleichs kommen praktisch kaum vor. Beim Spannungsausgleich im Tragwerk ist wieder der häufigste Fall der örtliche plastische Ausgleich, während der örtliche elastische Ausgleich in Sonderfällen vorkommen kann. Die weiteren Fälle des kontinuierlichen, plastischen oder elastischen, Ausgleichs im statisch unbestimmten Tragwerk lassen sich praktisch nur angenähert verwirklichen, sind aber als Grenzfälle wichtig.

Die Ausnutzungslinien $f(\mu, \nu)$, $f(\nu, \omega)$ und $f(\mu, \omega)$ bestehen beim elastischen Ausgleich aus Geraden durch den Ursprung und es ist ν_s bzw. $\omega_s = 1$. Beim kontinuierlichen Ausgleich gehen unter der Höchstlast alle Ausnutzungslinien durch einen Punkt.

(Eingegangen am 27. Oktober 1952.)
Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *H. Craemer*, Alexandria (Ägypten), Bulkeley, Immeuble Binorr.

[1] *H. Craemer*, Applications following from the maximum condition, Abh. Int. Ver. Brücken- u. Hochbau 12. Bd., 1952.

Zur Berechnung von Wirbelverteilung und Auftrieb eines dünnen Unterschallprofils in zwei hintereinander angeordneten Flügelgittern bei kompressiblen Strömungen.

Von **Paul F. Byrd** und **Mary T. Huggins.**

1. Einleitung. Vermittels einer Methode, die auf einem einfachen Singularitätenverfahren zur Erzeugung von Flügelgittern und auf der dabei erhaltenen Integralgleichung beruht, berechneten *J. Dörr*[1] und *K. Nickel*[2] in ihren kürzlich hier erschienenen Aufsätzen Wirbelverteilung und Auftrieb für ein Profil im senkrechten Gitterverband. Man interessiert sich heute jedoch auch für die Potentialströmung durch mehr als ein Schaufelgitter[3]. Im folgenden wird daher gezeigt, daß die Arbeiten von *Dörr* und *Nickel* sich ohne Schwierigkeit auf den Fall von zwei hintereinander angeordneten Gittern ausdehnen lassen. (Das Verfahren läßt sich auch auf beliebig viele (m) Flügelgitter erweitern.)

2. Die Integralgleichung. Betrachtet man zwei hintereinander liegende Flügelgitter, so lautet die (singuläre) Integralgleichung[4] zwischen den Wirbelbelegungen $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ und der induzierten Abwärtsgeschwindigkeit $W(x)$ der Skelettlinie der Flügel

$$W(x) = -\frac{\beta g}{2\pi}\int_0^a \Gamma_1(x_1)\,\mathfrak{Ctg}\,g(x-x_1)\,dx_1 - \frac{\beta g}{2\pi}\int_b^c \Gamma_2(x_2)\,\mathfrak{Ctg}\,g(x-x_2)\,dx_2 \quad (0<a<b<c) \qquad (1)$$

mit

$$g = \frac{\pi}{t\beta}, \quad \beta = \sqrt{1-M^2}, \qquad (2)$$

wobei M die Machzahl der Abströmungsgeschwindigkeit U_∞ und t die Gitterteilung bedeuten. Die Punkte 0, b liegen auf den Vorderkanten der zwei ungestaffelten Gitter und die Punkte a, c auf den hinteren Kanten. (Ist $c=b$, dann geht der Ausdruck (1) selbstverständlich in die Integralgleichung für das Einzelgitter über; und im Grenzübergang $t\to\infty$ hat die Integralgleichung genau die Form der Tragflügelgleichung für zwei hintereinander liegende Einzelflügel.)

Da die Tangente an die Kontur des Flügelgitters parallel zur resultierenden Strömungsrichtung ist, gilt in erster Näherung die kinematische Strömungsbedingung

$$W(x) = U_\infty \left(\frac{dz}{dx}\right)_{Kontur}, \qquad (3)$$

wobei $z(x)$ die Skelettkontur bedeutet.

3. Strenge Lösung der Integralgleichung. Wir führen zunächst die Substitutionen

$$\eta = e^{2gx}, \qquad \eta_1 = e^{2gx_1}, \qquad \eta_2 = e^{2gx_2} \qquad (4)$$

aus. Damit geht die Beziehung (1) in eine Integralgleichung über (ähnlich der von *H. Lomax*[5] und *P. Byrd*[5] betrachteten), die sich in geschlossener Form lösen läßt. Unter der Abströmbedingung, daß

$$\Gamma_1(a) = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_2(c) = 0 \qquad (5)$$

---

[1] *J. Dörr*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 66.
[2] *K. Nickel*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 6.
[3] *W. Spraglin*, Flow Through Cascades in Tandem, NACA TN 2393, 1951.
[4] Diese Integralgleichung ist nach der Singularitätenmethode und aus der *Birnbaum-Glauert*schen Theorie hergeleitet. Vorausgesetzt ist, daß in jedem der zwei Gitter die Profile aller Flügel gleich seien. Ferner werden die Wirbelbelegungen auf der x-Achse anstatt auf der Profilkontur angeordnet, da man sich hier auf sehr schlanke Formen beschränkt (d.h., man hält die Ordinaten der Flügel für erheblich kleiner als die Flügeltiefe und die Schaufelteilung).
[5] *H. Lomax* u. *P. Byrd*, Theoretical Aerodynamic Characteristics of a Family of Wing-Tail-Body Combinations, p. 8, Eq. (19), NACA TN 2554, 1951.

ist, findet man schließlich für (1) die Umkehrformeln:

für $0 < x < a$:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1(x) = -\frac{2g}{\pi\beta}\sqrt{\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x)\,(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x)}{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x)\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x}}\Bigg\{\frac{1}{2A}(L_1 + L_2) + \\ + \int_0^a [1 - \mathfrak{C}\mathfrak{t}\mathfrak{g}\,g(x - x_1)]\sqrt{\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1)\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1}{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1)\,(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1)}}\,W(x_1)\,dx_1 + \\ + \int_b^c [1 - \mathfrak{C}\mathfrak{t}\mathfrak{g}\,g(x - x_2)]\sqrt{\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b)\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2}{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a)\,(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2)}}\,W(x_2)\,dx_2\Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad (6a)$$

und für $b < x < c$:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_2(x) = -\frac{2g}{\pi\beta}\sqrt{\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a)\,(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x)}{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b)\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x}}\Bigg\{\frac{1}{2A}(L_1 + L_2) + \\ + \int_0^a [1 - \mathfrak{C}\mathfrak{t}\mathfrak{g}\,g(x - x_1)]\sqrt{\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1)\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1}{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1)\,(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1)}}\,W(x_1)\,dx_1 + \\ + \int_b^c [1 - \mathfrak{C}\mathfrak{t}\mathfrak{g}\,g(x - x_2)]\sqrt{\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b)\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2}{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a)\,(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2)}}\,W(x_2)\,dx_2\Bigg\}. \end{aligned}\right\} \quad (6b)$$

Die Konstante A ist

$$A = \sqrt{\frac{(1 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c)\,(1 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a)}{1 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b}}\;;$$

die Größe $(L_1 + L_2)$ hat die einfache Bedeutung der Gesamtzirkulation um ein waagerechtes Flügelpaar und wird nach Gl. (9) berechnet. (Die Lösung (6) führt für $c = b$ und $\beta = 1$ unmittelbar auf das von *Dörr* erhaltene Ergebnis zurück.)

4. Beispiel. Im Sonderfall $W(x) \equiv -U_\infty \alpha$ findet man aus (6) für das Vorder- und Hintergitter die zwei Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1(x) &= \frac{2\pi\alpha U_\infty}{\beta D}\sqrt{\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x)\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x}{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x)\,(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x)}}, \\ \Gamma_2(x) &= \frac{2\pi\alpha U_\infty}{\beta D}\sqrt{\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a)\,(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x)}{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b)\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x}} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

mit der Konstanten

$$\left.\begin{aligned} D = \pi\sqrt{\frac{(1 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c)\,(1 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a)}{1 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b}} + g\int_0^a \sqrt{\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1)\,(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1)}{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1)\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_1}}\,dx_1 + \\ + g\int_b^c \sqrt{\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,a)\,(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,c - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2)}{(\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,b)\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,g\,x_2}}\,dx_2. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Formelausdrücke (7) geben die Wirbelverteilung um dünne ebene Platten mit dem Anstellwinkel α. (Im Fall des Einzelflügelgitters, d.h. für $c = b$, erhält man sofort die Ergebnisse von *Grammel*[1] und *Nickel*[2].)

5. Gesamtzirkulation um Gitterprofile von beliebiger Kontur. Bei Verwendung der Theoreme[3] über die „Umkehrbarkeit" der Anströmung können wir aus (7) für beliebige Skelettprofile eine allgemeine Formel für die Gesamtzirkulation

$$L_1 + L_2 = \int_0^a \Gamma_1(x_1)\,dx_1 + \int_b^c \Gamma_2(x_2)\,dx_2$$

---

[1] *R. Grammel*, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, S. 93—97. Braunschweig 1917.
[2] Siehe Fußnote 2 S. 191.
[3] *M. Heaslet* u. *J. Spreiter*, Reciprocity Relations in Aerodynamics, NACA TN 2700, 1952.

oder den Auftrieb (*Kutta-Jukowskischer* Satz)

$$H = \varrho_\infty U_\infty (L_1 + L_2)$$

um ein Flügelpaar gewinnen. Dabei kommen wir zu der Gleichung

$$\left.\begin{aligned} L_1 + L_2 = &- \frac{2\pi}{\beta D} \int_0^a \sqrt{\frac{(\mathfrak{Tg}\, g b - \mathfrak{Tg}\, g x_1)\, \mathfrak{Tg}\, g x_1}{(\mathfrak{Tg}\, g a - \mathfrak{Tg}\, g x_1)(\mathfrak{Tg}\, g c - \mathfrak{Tg}\, g x_1)}}\, W(x_1)\, dx_1 + \\ &- \frac{2\pi}{\beta D} \int_b^c \sqrt{\frac{(\mathfrak{Tg}\, g x_2 - \mathfrak{Tg}\, g b)\, \mathfrak{Tg}\, g x_2}{(\mathfrak{Tg}\, g x_2 - \mathfrak{Tg}\, g a)(\mathfrak{Tg}\, g c - \mathfrak{Tg}\, g x_2)}}\, W(x_2)\, dx_2 . \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Dies ist die Größe, die in (6a) und (6b) eingeht. Die Gesamtzirkulation L_1 und L_2 um ein Einzelglied jedes Gitters lassen sich dann durch eine Integration aus (6a) und (6b) bestimmen. (Setzt man $c = b$, $\beta = 1$, so ergibt sich zugleich die von *Nickel* hergeleitete Gleichung.) Zur Ausführung der Integrationen in allen der obigen Formeln ist es zweckmäßig, die Substitutionen (4) zu verwenden.

6. Symmetrische Gitterprofile. Zum Schluß möchten wir hinzufügen, daß das Verfahren auch für zwei hintereinander angeordnete Schaufelgitter gilt, deren schlanke symmetrische Profile Anstellwinkel Null haben. Hier bringt die Integralgleichung die waagerechte induzierte Strömungsgeschwindigkeit $U(x)$ in Beziehung zu den Quell-Senken-Belegungen $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ der Flügel. Diese Gleichung, die beinahe dieselbe Form wie Ausdruck (1) für die Skelettlinie hat, lautet

$$U(x) = \frac{g}{2\pi\beta} \int_0^a Q_1(x_1)\, \mathfrak{Ctg}\, g(x - x_1)\, dx_1 + \frac{g}{2\pi\beta} \int_b^c Q_2(x_2)\, \mathfrak{Ctg}\, g(x - x_2)\, dx_2 , \qquad (10)$$

wobei $Q(x) = 2\, U_\infty\, dz_f/dx$ und z_f die Ordinaten der Oberseite des symmetrischen Körpers bedeuten. Unter der Bedingung, daß die Gesamtquellstärken verschwinden (weil die Profile geschlossen sein sollen), kann man wie für Gleichung (1) eine Umkehrformel der Integralgleichung (10) erhalten, die für gegebene Geschwindigkeitsverteilungen die symmetrischen Profilkonturen der zwei Flügelgitter zu berechnen erlaubt. Völlig ausgeschrieben sind die zwei Gleichungen dieser Umkehrformel etwas länger als (6a) und (6b) und wurden deshalb hier nicht gegeben. Im besonderen Fall des Einzelflügelgitters führt die Formel auf

$$Q(x) = \frac{2\beta g}{\pi\, \mathfrak{Cof}^2 g x \sqrt{(\mathfrak{Tg}\, g a - \mathfrak{Tg}\, g x)\, \mathfrak{Tg}\, g x}} \int_0^a \frac{\sqrt{(\mathfrak{Tg}\, g a - \mathfrak{Tg}\, g x_1)\, \mathfrak{Tg}\, g x_1}}{\mathfrak{Tg}\, g x - \mathfrak{Tg}\, g x_1}\, U(x_1)\, dx_1 \qquad (11)$$

zurück.

(Eingegangen am 31. Oktober 1952.)

Anschrift der Verfasser: *Paul F. Byrd* und *Mary T. Huggins*,
Ames Laboratory, NACA, Moffett Field (California) (USA).

Ein Beitrag zur nichtlinearen Elastizitätstheorie.

Von **H. Jung.**

1. Einleitung. An der Oberfläche eines isotropen Körpers sind die Verschiebungen bzw. ein Kräftesystem gegeben. Das elastische Verhalten des Körpers werde durch eine Schubfunktion und eine Kompressionsfunktion gekennzeichnet, die beide aus Versuchen zu ermitteln sind. In Weiterführung der bisherigen Ansätze von *C. Weber*[1], *A. Philippidis*[2] und *H. Kauderer*[3] wird die Voraussetzung, daß bei den Verzerrungen die Glieder zweiter und höherer Ordnung gestrichen werden dürfen, nicht gemacht, sondern es werden erst die Glieder dritter und höherer Ordnung vernachlässigt. In Ziff. **2** werden die Verzerrungen und der Verzerrungstensor hergeleitet, wobei vom deformierten Element ausgegangen wird. Die auf das deformierte Element bezogenen Spannungen sind in Ziff. *3* dargestellt. Mit den aus Ziff. **2** und **3** erhaltenen Ergebnissen wird in Ziff. **4** ein allgemeines Elastizitätsgesetz aufgestellt, und in Ziff. **5** werden die Zusammenhänge mit dem Plastizitätsgesetz und dem *Hooke*schen Gesetz aufgezeigt. Elementare Lösungen werden dann in Ziff. **6** bis **8** gegeben. Der ebene Verzerrungszustand wird in Ziff. **9** behandelt und daraus eine technische Biegelehre (Ziff. **10**) hergeleitet.

2. Verzerrungen. Wird ein isotroper Körper durch ein Kräftesystem deformiert, so geht der Punkt $\bar{P}$ des Körpers mit den Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ in den Punkt P mit den Koordinaten x, y, z über. Bezeichnet man mit $u\,(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ und $w(x, y, z)$ die Verschiebungen in der x-, y- und z-Richtung, so ist der Zusammenhang der Koordinaten gegeben durch

$$\bar{x} = x - u\,(x, y, z)\,, \qquad \bar{y} = y - v\,(x, y, z)\,, \qquad \bar{z} = z - w\,(x, y, z)\,. \tag{1}$$

Aus (1) lassen sich die Verzerrungen bestimmen[4]. Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xx} &= 2\frac{\partial u}{\partial x} - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \\ \gamma_{yy} &= 2\frac{\partial v}{\partial y} - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right], \\ \gamma_{zz} &= 2\frac{\partial w}{\partial z} - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right], \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{2b}$$

Die Verzerrungen (2a) und (2b) sind die Komponenten des Tensors

$$\mathfrak{S} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \frac{1}{2}\gamma_{zz} \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

---

[1] *C. Weber*, Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 189.
[2] *A. Philippidis*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947), S. 31.
[3] *H. Kauderer*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 450.
[4] *G. Hamel*, Theoretische Mechanik, S. 190, Berlin 1949.

Die Invarianten des Tensors (3) sind

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(\gamma_{xx}+\gamma_{yy}+\gamma_{zz}), \\ J_2 &= \frac{1}{4}(\gamma_{xx}\gamma_{yy}+\gamma_{xx}\gamma_{zz}+\gamma_{yy}\gamma_{zz}-\gamma_{xy}^2-\gamma_{xz}^2-\gamma_{yz}^2), \\ J_3 &= \frac{1}{8}\begin{vmatrix}\gamma_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy} & \gamma_{yy} & \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \gamma_{zz}\end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Führt man die Tensoren

$$\mathfrak{S}_0 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3}J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}J_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}J_1 \end{Vmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{S}} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{xx}-\frac{1}{3}J_1 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{yy}-\frac{1}{3}J_1 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \frac{1}{2}\gamma_{zz}-\frac{1}{3}J_1 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

ein, so läßt sich der Verzerrungstensor in der Form

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \bar{\mathfrak{S}} \tag{6}$$

darstellen. Die durch die Verzerrungen hervorgerufene Volumenänderung ist

$$\lambda_v = 1 - \sqrt{1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3}\,. \tag{7}$$

Bezeichnet man mit $\bar{J}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ die Invarianten des Tensors $\bar{\mathfrak{S}}$, so ist die durch die Komponenten von $\bar{\mathfrak{S}}$ bedingte Volumenänderung

$$\bar{\lambda}_v = 1 - \sqrt{1 + 4\bar{J}_2 - 8\bar{J}_3}\,. \tag{8}$$

Werden in (2a) und (2b) die quadratischen Glieder vernachlässigt, so wird

$$\bar{\lambda}_v = 0$$

da $\bar{J}_2$ und $\bar{J}_3$ nur quadratische Glieder enthalten.

3. Die Spannungen. Schneidet man aus dem deformierten Körper ein Volumenelement heraus, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen für dieses Element

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Bei der Aufstellung der Gleichungen (9) ist angenommen, daß die Massenkräfte und andere Volumenkräfte vernachlässigt werden dürfen. Die am Volumenelement auftretenden Spannungen sind die Komponenten des Tensors

$$\mathfrak{P} = \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Vmatrix} \tag{10}$$

mit den Invarianten

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z = 3\sigma_0, \\ P_2 &= \sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z-\tau_{xy}^2-\tau_{xz}^2-\tau_{yz}^2 \\ P_3 &= \begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Spaltet man den Tensor (10) in einen Kugeltensor $\mathfrak{P}_0$, der für das Element den hydrostatischen Spannungszustand gibt, und einen Deviator $\overline{\mathfrak{P}}$ auf, so läßt sich (10) in der Form schreiben

$$\mathfrak{P} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{P}_0 - \overline{\mathfrak{P}}\,. \tag{12}$$

4. Das Elastizitätsgesetz. Bezeichnet man mit γ_i $(i = 1, 2, 3)$ die Hauptdehnungen, so lassen sich diese aus (4) bestimmen. Es gilt

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz} &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3\,, \\ \gamma_{xx}\gamma_{yy} + \gamma_{xx}\gamma_{zz} + \gamma_{yy}\gamma_{zz} - \gamma_{xy}^2 - \gamma_{xz}^2 - \gamma_{yz}^2 &= \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1\,, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \gamma_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

In entsprechender Weise ermittelt man aus (11) die Hauptspannungen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Nach *Roš* und *Eichinger*[1] gilt

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2} = f_1\left(\sqrt{\left(\gamma_1 - \frac{1}{3}J_1\right)^2 + \left(\gamma_2 - \frac{1}{3}J_1\right)^2 + \left(\gamma_3 - \frac{1}{3}J_1\right)^2}\right),$$

oder in den Tensorinvarianten aus (3) und (10) geschrieben

$$\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2} = f_1\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right). \tag{15}$$

Eine Schubfunktion wird durch

$$g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right) \equiv \frac{f_1\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}} \tag{16}$$

definiert. Fordert man, daß das Elastizitätsgesetz beim Übergang zu kleinen Formänderungen das *Hooke*sche Gesetz ergibt, so wird der Zusammenhang zwischen $\overline{\mathfrak{P}}$ und $\overline{\mathfrak{S}}$ am zweckmäßigsten in der Form gegeben

$$\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{S}}\, g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right). \tag{17}$$

Führt man noch eine Kompressionsfunktion $f_2\left(\frac{1}{3}J_1\right)$ ein, so läßt sich der hydrostatische Spannungszustand geben durch

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{S}_0 f_2\left(\frac{1}{3}J_1\right). \tag{18}$$

In (17) und (18) wurde die Voraussetzung gemacht, daß die Hauptspannungsrichtungen mit den Hauptdehnungsrichtungen zusammenfallen.
Das Elastizitätsgesetz lautet damit in Tensorform

$$\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{S}}\, g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right) + \mathfrak{S}_0 f_2\left(\frac{1}{3}J_1\right) \tag{19a}$$

und in Komponenten

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{xx} - \frac{1}{3}J_1\right) g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right) + \frac{1}{3}J_1 f_2\left(\frac{1}{3}J_1\right), \\ \sigma_y &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{yy} - \frac{1}{3}J_1\right) g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right) + \frac{1}{3}J_1 f_2\left(\frac{1}{3}J_1\right), \\ \sigma_z &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{zz} - \frac{1}{3}J_1\right) g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right) + \frac{1}{3}J_1 f_2\left(\frac{1}{3}J_1\right), \end{aligned}\right\} \tag{19b}$$

[1] *M. Roš* u. *A. Eichinger*, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr, III. Metalle, Zürich 1929, S. 7.

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy}\, g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right),\\ \tau_{xz} &= \frac{1}{2}\gamma_{xz}\, g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right),\\ \tau_{yz} &= \frac{1}{2}\gamma_{yz}\, g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{19c}$$

Definiert man eine Querdehnungsfunktion durch

$$\nu = \frac{f_2\left(\frac{1}{3}J_1\right) - g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right)}{g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right)}, \tag{20}$$

so lassen sich die Gleichungen (19b) in der Form schreiben

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{xx} + \frac{\nu}{3}J_1\right) g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right),\\ \sigma_y &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{yy} + \frac{\nu}{3}J_1\right) g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right),\\ \sigma_z &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{zz} + \frac{\nu}{3}J_1\right) g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Setzt man

$$\bar{\mathfrak{S}} = \bar{\mathfrak{P}}\, G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right), \tag{22}$$

$$\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{P}_0\, F_2\left(\frac{1}{3}P_1\right), \tag{23}$$

wobei G die Umkehrfunktion von g und F_2 die Umkehrfunktion von f_2 bedeutet, so läßt sich das Elastizitätsgesetz in der Form schreiben

$$\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{P}}\, G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right) + \mathfrak{P}_0\, F_2\left(\frac{1}{3}P_1\right). \tag{24}$$

In Komponenten erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\gamma_{xx} &= \left(\sigma_x - \frac{1}{3}P_1\right) G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right) + \sigma_0\, F_2\left(\frac{1}{3}P_1\right),\\ \frac{1}{2}\gamma_{yy} &= \left(\sigma_y - \frac{1}{3}P_1\right) G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right) + \sigma_0\, F_2\left(\frac{1}{3}P_1\right),\\ \frac{1}{2}\gamma_{zz} &= \left(\sigma_z - \frac{1}{3}P_1\right) G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right) + \sigma_0\, F_2\left(\frac{1}{3}P_1\right),\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\gamma_{xy} &= \tau_{xy}\, G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right),\\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} &= \tau_{xz}\, G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right),\\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} &= \tau_{yz}\, G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Führt man die Funktion

$$\bar{\nu} = \frac{G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right) - F_2\left(\frac{1}{3}P_1\right)}{G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right)} \tag{27}$$

ein, so geht (25) über in

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\gamma_{xx} &= \left(\sigma_x - \bar{\nu}\frac{P_1}{3}\right) G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right),\\ \frac{1}{2}\gamma_{yy} &= \left(\sigma_y - \bar{\nu}\frac{P_1}{3}\right) G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right),\\ \frac{1}{2}\gamma_{zz} &= \left(\sigma_z - \bar{\nu}\frac{P_1}{3}\right) G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

5. Spezialisierung des Gesetzes. Das durch (19a) bzw. (24) gegebene Elastizitätsgesetz muß beim Übergang zu kleinen Formänderungen das *Hooke*sche Gesetz ergeben. Entwickelt man die Schubfunktion

$$g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right)$$

in eine Potenzreihe nach der Veränderlichen

$$\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2},$$

so ist

$$g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right) = g_0 + g_1\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2} + g_2 \cdot 2\left(\frac{1}{3}J_1^2 - J_2\right) + \cdots. \tag{29}$$

Die Kompressionsfunktion wird ebenfalls in eine Potenzreihe nach $\frac{1}{3}J_1$ entwickelt; es wird

$$f_2\left(\frac{1}{3}J_1\right) = e_0 + e_1\frac{1}{3}J_1 + e_2\frac{1}{9}J_1^2 + \cdots. \tag{30}$$

Geht man mit (29) und (30) in (19a) und (19b) ein, so kommt

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{xx} - \frac{1}{3}J_1\right)\left(g_0 + g_1\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2} + \cdots\right) + \frac{1}{3}J_1\left(e_0 + e_1\frac{1}{3}J_1 + \cdots\right),\\ \sigma_y &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{yy} - \frac{1}{3}J_1\right)\left(g_0 + g_1\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2} + \cdots\right) + \frac{1}{3}J_1\left(e_0 + e_1\frac{1}{3}J_1 + \cdots\right),\\ \sigma_z &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{zz} - \frac{1}{3}J_1\right)\left(g_0 + g_1\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2} + \cdots\right) + \frac{1}{3}J_1\left(e_0 + e_1\frac{1}{3}J_1 + \cdots\right),\\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy}\left(g_0 + g_1\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2} + \cdots\right),\\ \tau_{xz} &= \frac{1}{2}\gamma_{xz}\left(g_0 + g_1\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2} + \cdots\right),\\ \tau_{yz} &= \frac{1}{2}\gamma_{yz}\left(g_0 + g_1\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2} + \cdots\right).\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Streicht man in (31) sämtliche Glieder, die Quadrate und höhere Potenzen der Dehnungen enthalten, so erhält man das *Hooke*sche Gesetz.

Soll aus (24) das *Hooke*sche Gesetz abgeleitet werden, so geht man mit den Reihenentwicklungen

$$G\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right) = G_0 + G_1\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2} + G_2 \cdot 2\left(\frac{1}{3}P_1^2 - P_2\right) + \cdots, \tag{32}$$

$$F_2\left(\frac{1}{3}P_1\right) = E_0 + \frac{1}{3}E_1 P_1 + \frac{1}{9}E_2 P_2^2 + \cdots \tag{33}$$

in (25) und (26) ein und erhält

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\gamma_{xx} &= \left(\sigma_x - \frac{P_1}{3}\right)\left(G_0 + G_1\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2} + \cdots\right) + \frac{P_1}{3}\left(E_0 + \frac{1}{3}E_1 P_1 + \cdots\right),\\ &\cdots\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \tau_{xy}\left(G_0 + G_1\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2} + \cdots\right),$$
$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Soll (34) auf das *Hooke*sche Gesetz führen, so müssen in (32) und (33) die Glieder

$$G_i\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}\right) \ll G_0 \quad \text{und} \quad E_i\left(\frac{1}{3}P_1\right) \ll E_0 \qquad (\text{mit } i > 0)$$

sein, damit in den Reihenentwicklungen (34) die Glieder höherer Ordnung gestrichen werden können.

Um die klassische Plastizitätstheorie zu erhalten, setzt man

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}P_1, \quad J_1 = 0,$$
$$\mathfrak{P}_0 = \lim_{J_1 \to 0}\left[\mathfrak{S}_0 f\left(\frac{1}{3}J_1\right)\right],$$
$$g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}\right) = \frac{g_{-1}}{\sqrt{2}\sqrt{-J_2}}.$$

Die Spannungen werden damit

$$\sigma_x - \sigma_0 = \frac{1}{2}\gamma_{xx}\frac{g_{-1}}{\sqrt{2}\sqrt{-J_2}},$$
$$\sigma_y - \sigma_0 = \frac{1}{2}\gamma_{yy}\frac{g_{-1}}{\sqrt{2}\sqrt{-J_2}},$$
$$\sigma_z - \sigma_0 = \frac{1}{2}\gamma_{zz}\frac{g_{-1}}{\sqrt{2}\sqrt{-J_2}},$$
$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\frac{g_{-1}}{\sqrt{2}\sqrt{-J_2}},$$
$$\tau_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}\frac{g_{-1}}{\sqrt{2}\sqrt{-J_2}},$$
$$\tau_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz}\frac{g_{-1}}{\sqrt{2}\sqrt{-J_2}}.$$

6. Gleichförmige Spannungszustände. a) Der hydrostatische Spannungszustand. Setzt man in (25) und (26)

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_0 = \text{konst},$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

so werden die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, und es ist

$$\gamma_{xx} = \gamma_{yy} = \gamma_{zz} = 2K_0, \qquad (35)$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \qquad (36)$$

Geht man mit (36) in (2b) ein, dann erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Die Gleichungen (37) werden befriedigt durch den Ansatz

$$u = c_1 x, \quad v = c_2 y, \quad w = c_3 z. \qquad (38)$$

Aus (38), (2) und (35) erhält man

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= c_2 = c_3 = c\,, \\ 2\,K_0 &= 2\,c - c^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Aus (39) ergibt sich die physikalisch mögliche Lösung

$$c = 1 - \sqrt{1 - 2\,K_0} = 1 - \sqrt{1 - 2\,\sigma_0\,F_2(\sigma_0)}\,. \tag{40}$$

b) Der einachsige Spannungszustand. Setzt man in (25) und (26)

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\,,$$
$$\sigma_x = \varkappa_0\,,$$

dann ist

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\,\varkappa_0$$

und

$$\frac{1}{2}\,\gamma_{xx} = \frac{2}{3}\,\varkappa_0\,G(\varkappa_0) + \frac{1}{3}\,\varkappa_0\,F_2(\varkappa_0)\,. \tag{41}$$

$$\frac{1}{2}\,\gamma_{yy} = \frac{1}{2}\,\gamma_{zz} = -\frac{1}{3}\,\varkappa_0\,G(\varkappa_0) + \frac{1}{3}\,\varkappa_0\,F_2(\varkappa_0)\,. \tag{42}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0\,. \tag{43}$$

Mit (43) und (2) wird

$$u = c_1\,x\,, \qquad v = c_2\,y\,, \qquad w = c_3\,z\,. \tag{44}$$

Aus (44), (41) und (42) erhält man mit (2)

$$c_1 = 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3}\,\varkappa_0\,G(\varkappa_0) - \frac{2}{3}\,\varkappa_0\,F_2(\varkappa_0)}\,,$$

$$c_2 = c_3 = 1 - \sqrt{1 + \frac{2}{3}\,\varkappa_0\,G(\varkappa_0) - \frac{2}{3}\,\varkappa_0\,F_2(\varkappa_0)}\,.$$

c) Der zweiachsige Spannungszustand. Setzt man in (25) und (26)

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\,,$$
$$\sigma_y = \varkappa_0\,, \qquad \sigma_z = \varkappa_1\,,$$

dann ist

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\,, \qquad P_2 = \varkappa_0 \cdot \varkappa_1\,.$$

Die Verzerrungen sind

$$\frac{1}{2}\,\gamma_{xx} = -\frac{1}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\,G\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\varkappa_0^2 - \varkappa_0\varkappa_1 + \varkappa_1^2}\right) + \frac{1}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\,F_2\left(\frac{1}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\right), \tag{45}$$

$$\frac{1}{2}\,\gamma_{yy} = \left(\frac{2}{3}\,\varkappa_0 - \frac{1}{3}\,\varkappa_1\right)G\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\varkappa_0^2 - \varkappa_0\varkappa_1 + \varkappa_1^2}\right) + \frac{1}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\,F_2\left(\frac{1}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\right), \tag{46}$$

$$\frac{1}{2}\,\gamma_{zz} = \left(\frac{2}{3}\,\varkappa_1 - \frac{1}{3}\,\varkappa_0\right)G\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\varkappa_0^2 - \varkappa_0\varkappa_1 + \varkappa_1^2}\right) + \frac{1}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\,F_2\left(\frac{1}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\right). \tag{47}$$

Der Ansatz

$$u = c_1\,x, \qquad v = c_2\,y, \qquad w = c_3\,z$$

mit

$$c_1 = 1 - \left[1 + \frac{2}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\,G\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\varkappa_0^2 - \varkappa_0\varkappa_1 + \varkappa_1^2}\right) - \frac{2}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\,F_2\left(\frac{1}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\right)\right]^{1/2},$$

$$c_2 = 1 - \left[1 - \left(\frac{4}{3}\,\varkappa_0 - \frac{2}{3}\,\varkappa_1\right)G\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\varkappa_0^2 - \varkappa_0\varkappa_1 + \varkappa_1^2}\right) - \frac{2}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\,F_2\left(\frac{1}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\right)\right]^{1/2},$$

$$c_3 = 1 - \left[1 - \left(\frac{4}{3}\,\varkappa_1 - \frac{2}{3}\,\varkappa_0\right)G\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\varkappa_0^2 - \varkappa_0\varkappa_1 + \varkappa_1^2}\right) - \frac{2}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\,F_2\left(\frac{1}{3}\,(\varkappa_0 + \varkappa_1)\right)\right]^{1/2}$$

ist damit die gesuchte Lösung. Der dreiachsige Spannungszustand läßt sich auf dieselbe Weise behandeln.

d) Der einachsige Schub. Setzt man in (25) und (26)

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0\,, \quad \tau_{yz} = \varkappa_1\,,$$

so werden die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Die Verzerrungen sind damit

$$\gamma_{xx} = \gamma_{yy} = \gamma_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = \varkappa_1 G(\varkappa_1)\,. \tag{48}$$

Setzt man (48) in (2) ein, so erhält man das Gleichungssystem zur Bestimmung der Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned}
&2\frac{\partial u}{\partial x} - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] = 0\,,\\
&2\frac{\partial v}{\partial y} - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] = 0\,,\\
&2\frac{\partial w}{\partial z} - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] = 0\,,\\
&\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} = 0\,,\\
&\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} = 0\,,\\
&\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} = \varkappa_1 G(\varkappa_1)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Um das Gleichungssystem (49) zu befriedigen, macht man den Ansatz

$$u = 0\,, \quad v = c_2 z\,, \; w = c_3 z\,. \tag{50}$$

Geht man mit (50) in (49) ein, so erhält man

$$c_2 = \sqrt{2\,c_3 - c_3^2}\,,$$
$$c_2 = \varkappa_1 G(\varkappa_1)\,, \quad c_3 = 1 - \sqrt{1 + \varkappa_1 G(\varkappa_1)}\,.$$

e) Allgemeiner Ansatz für die elementaren Lösungen. Sämtliche hier durchgerechneten Beispiele und noch weitere lassen sich aus dem Ansatz für die Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned}
u &= a_1 x + a_2 y + a_3 z\,,\\
v &= b_1 x + b_2 y + b_3 z\,,\\
w &= c_1 x + c_2 y + c_3 z\,.
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

herleiten.

7. Torsion. Bezeichnet man mit $\bar{P}(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{z})$ einen Punkt vor der Deformation und mit $P(r, \varphi, z)$ diesen Punkt nach der Deformation, so ist der Zusammenhang der Zylinderkoordinaten gegeben durch

$$\left.\begin{aligned}
\bar{r} &= r - u(r, \varphi, z)\,,\\
\bar{\varphi} &= \varphi - v(r, \varphi, z)\,,\\
\bar{z} &= z - w(r, \varphi, z)\,,
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

wenn mit

u die Radialverschiebung,
$r\,v$ die auf dem Kreisbogen r = konst. durchlaufene Strecke,
w die Axialverschiebung

bezeichnet wird. Aus (52) erhält man die Verzerrungen[1]

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{rr} &= 2\frac{\partial u}{\partial r} - \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - (r-u)^2\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2,\\
\gamma_{\varphi\varphi} &= 2\frac{u}{r} - \left(\frac{u}{r}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(1 - \frac{u}{r}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2\left(1 - \frac{u}{r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2,\\
\gamma_{zz} &= 2\frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - (r-u)^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2,
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

[1] Fußnote 4, S. 1.

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} + (r-u)^2\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - (r-u)^2\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right],\\
\gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial z} - (r-u)^2\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial z},\\
\gamma_{\varphi z} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial w}{\partial \varphi} + (r-u)^2\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial w}{\partial z} - (r-u)^2\frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial z}\right].
\end{aligned}\right\}$$

In Zylinderkoordinaten lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0,\\
\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + 2\frac{\tau_{r\varphi}}{r} &= 0,\\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Setzt man in (54) $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{rz} = 0$,

so gehen die Gleichgewichtsbedingungen über in

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} = 0, \tag{55}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + 2\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{r} = 0. \tag{56}$$

Mit $\tau_{r\varphi} = \Phi_1(r), \qquad \tau_{\varphi z} = \Phi_2(r)$

ist (55) erfüllt und (56) geht über in

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\tau_{r\varphi}}{r} = 0. \tag{56a}$$

Macht man für die Verschiebungen den Ansatz

$$u = w = 0, \qquad v = c_1 z$$

und vernachlässigt $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2$ (Theorie erster Ordnung), so erhält man aus (53)

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_{rr} = \gamma_{\varphi\varphi} = \gamma_{zz} = \gamma_{r\varphi} = \gamma_{rz} = 0,\\
&\gamma_{\varphi z} = r\,c_1.
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Mit (57) wird

$$\tau_{\varphi z} = \frac{1}{2} r\, c_1\, g\left(\frac{r\,c_1}{\sqrt{2}}\right). \tag{58}$$

Durch (58) ist die Spannungsverteilung in einem kreiszylindrischen Körper gegeben, der an seinen Enden durch zwei Momente verdreht wird. Bezeichnet man mit r_i den Innenhalbmesser und mit r_a den Außenhalbmesser eines Rohres, so wird das auf das Rohr ausgeübte Drehmoment

$$M = 2\pi \int_{r_i}^{r_a} \tau_{\varphi z}\, r\, dr. \tag{59}$$

Der Torsionsversuch läßt sich damit zur Bestimmung der Schubfunktion nur im Rahmen einer Theorie erster Ordnung heranziehen.

8. Der Zugversuch. Für den rotationssymmetrischen Verschiebungszustand erhält man aus (53) mit $v = 0$, $\varphi = \bar{\varphi}$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{rr} &= 2\frac{\partial u}{\partial r} - \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2,\\
\gamma_{\varphi\varphi} &= 2\frac{u}{r} - \left(\frac{u}{r}\right)^2,\\
\gamma_{zz} &= 2\frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,\\
\gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (54) lauten dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= 0\,, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Setzt man

$$\sigma_z = \varkappa_1\,, \qquad \sigma_r = \sigma_\varphi = \tau_{rz} = 0\,,$$

so werden die Gleichgewichtsbedingungen (61) erfüllt, und man erhält für die Verzerrungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\gamma_{rr} = \frac{1}{2}\gamma_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{3}\varkappa_1 G(\varkappa_1) + \frac{1}{3}\varkappa_1 F_2(\varkappa_1)\,, \\ \frac{1}{2}\gamma_{zz} &= \frac{2}{3}\varkappa_1 G(\varkappa_1) + \frac{1}{3}\varkappa_1 F_2(\varkappa_1)\,. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Macht man für die Verschiebungen den Ansatz

$$u = c_1 r\,, \qquad w = c_2 z\,,$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{rr} = 2c_1 - c_1^2 &= -\frac{2}{3}\varkappa_1 G(\varkappa_1) + \frac{2}{3}\varkappa_1 F_2(\varkappa_1)\,, \\ \gamma_{\varphi\varphi} = 2c_1 - c_1^2 &= -\frac{2}{3}\varkappa_1 G(\varkappa_1) + \frac{2}{3}\varkappa_1 F_2(\varkappa_1)\,, \\ \gamma_{zz} = 2c_2 - c_2^2 &= \frac{4}{3}\varkappa_1 G(\varkappa_1) + \frac{2}{3}\varkappa_1 F_2(\varkappa_1)\,. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Mit (63) ist

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 1 - \sqrt{1 + \frac{2}{3}\varkappa_1 G(\varkappa_1) - \frac{2}{3}\varkappa_1 F_2(\varkappa_1)}\,, \\ c_2 &= 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3}\varkappa_1 G(\varkappa_1) - \frac{2}{3}\varkappa_1 F_2(\varkappa_1)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Der Zugversuch eignet sich nur im Rahmen der Gleichmaßdehnung zur Bestimmung der Verfestigungsfunktion, da beim Auftreten einer Einschnürung die Bedingung

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = 0$$

nicht mehr für alle r und z erfüllt ist.

9. Der ebene Verzerrungszustand. Macht man für die Verschiebungen den Ansatz

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y),\ w = 0\,, \tag{65}$$

so geht (2) über in

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xx} &= 2\frac{\partial u}{\partial x} - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right], \\ \gamma_{yy} &= 2\frac{\partial v}{\partial y} - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= \gamma_{zz} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten damit

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0\,, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Mit (66) werden die Spannungen

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{1}{6}(2\gamma_{xx}-\gamma_{yy})\,g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}\overset{+}{J}_1^2-\overset{+}{J}_2}\right)+\frac{1}{3}\overset{+}{J}_1 f_2(\overset{+}{J}_1),\\
\sigma_y &= \frac{1}{6}(2\gamma_{yy}-\gamma_{xx})\,g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}\overset{+}{J}_1^2-\overset{+}{J}_2}\right)+\frac{1}{3}\overset{+}{J}_1 f_2(\overset{+}{J}_1),\\
\sigma_z &= -\frac{1}{6}(\gamma_{xx}+\gamma_{yy})\,g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}\overset{+}{J}_1^2-\overset{+}{J}_2}\right)+\frac{1}{3}\overset{+}{J}_1 f_2(\overset{+}{J}_1),\\
\tau_{xy} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy}\,g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}\bar{J}_1^2-\bar{J}_2}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

mit

$$\overset{+}{J}_1=\frac{1}{2}(\gamma_{xx}+\gamma_{yy}), \qquad \overset{+}{J}_2=\frac{1}{4}(\gamma_{xx}\cdot\gamma_{yy}-\gamma_{xy}^2).$$

Außer den schon bekannten elementaren Lösungen lassen sich auch für den ebenen Verzerrungszustand keine weiteren exakten Lösungen auf einfache Weise finden.

An dem durch Abb. 1 gegebenen Belastungsfall soll nun gezeigt werden, wie technische Beispiele näherungsweise durchgerechnet werden können. Für diesen Belastungsfall lauten die Randbedingungen

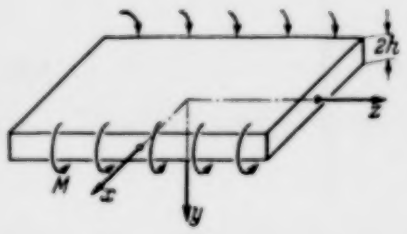

Abb. 1.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y &= 0\\ \tau_{xy} &= 0\end{aligned}\right\} \text{ für } y=\pm h. \tag{69}$$

Macht man die Annahme, daß τ_{xy} identisch verschwindet, so führt (67) auf

$$\sigma_x=\Phi_1(y), \qquad \sigma_y=\Phi_2(x). \tag{70}$$

Setzt man

$$\sigma_y\equiv 0,$$

so sind die Randbedingungen (69) erfüllt. Aus der zweiten Gleichung (68) folgt

$$\frac{1}{2}(2\gamma_{yy}-\gamma_{xx})\,g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}\overset{+}{J}_1^2-\overset{+}{J}_2}+\overset{+}{J}_1 f_2(\overset{+}{J}_1)=0.\right. \tag{71}$$

Um die Gleichung (71) nach γ_{yy} auflösen zu können, macht man für die Verschiebung den Ansatz

$$u=c_1\,x\,y. \tag{72}$$

Vernachlässigt man $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$ und $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$ so erhält man mit (72)

$$\gamma_{xx}=2c_1\,y-c_1^2\,y^2.$$

Mit der Annahme, daß die Schubfunktion und die Kompressionsfunktion nur von der Hauptverzerrung γ_{xx} abhängt, läßt sich aus (71) γ_{yy} näherungsweise bestimmen:

$$\gamma_{yy}=\gamma_{xx}\frac{g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)-f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}{2\,g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)+f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}. \tag{73}$$

Aus (73) ergibt sich dann

$$v=\frac{1}{2}\int\gamma_{xx}\frac{g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)-f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}{2\,g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)+f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}\,dy-\frac{c_1\,x^2}{2}. \tag{74}$$

Die Spannungen werden damit

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{6}\left[\gamma_{xx}\left(2-\frac{g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)-f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}{2\,g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)+f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}\right)g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}\,\dot{J}_1^2-\dot{J}_2}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\gamma_{xx}\left(1+\frac{g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)-f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}{2\,g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)+f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}\right)f_2(\dot{J}_1)\right],\\ \sigma_y &= -\frac{1}{6}\,\gamma_{xx}\left[1+\frac{g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)-f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}{2\,g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)+f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}\right]\left(g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}\,\dot{J}_1^2-\dot{J}_2}\right)-f_2(\dot{J}_1)\right).\end{aligned}\right\}\tag{75}$$

Berücksichtigt man bei den in (75) auftretenden Tensorinvarianten $\dot{J}_1$ und $\dot{J}_2$ noch das durch (73) gegebene γ_{yy}, so ist

$$\dot{J}_1 = \frac{1}{2}\,\gamma_{xx}\left(1+\frac{g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)-f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}{2\,g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)+f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}\right),$$

$$\dot{J}_2 = \frac{1}{4}\,\gamma_{xx}^2\,\frac{g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)-f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}{2\,g\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\gamma_{xx}|\right)+f_2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xx}\right)}.$$

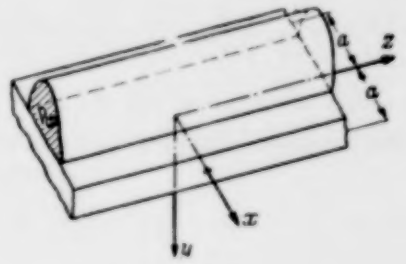

Abb. 2.

10. Der unendlich lange Plattenstreifen. Der Belastungsfall sei durch Abb. 2 gegeben. Die Abmessungen der Platte sind

$$-a \le x \le +a, \qquad -\frac{h}{2} \le y \le +\frac{h}{2}, \qquad -\infty \le z \le +\infty.$$

Auf den Rändern $x = \pm a$ kann die Platte als starr eingespannt oder frei aufliegend angesehen werden.

Aus zahlreichen Versuchen ist bekannt, daß auch bei großen Ausbiegungen die Dehnungen

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = c_1 y \tag{76}$$

sind. Mit (76) erhält man

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\,\gamma_{xx} + \frac{1}{8}\,\gamma_{xx}^2. \tag{77}$$

Geht man mit (76) in (77) ein, so wird, wenn in den Reihenentwicklungen nur die drei ersten Glieder berücksichtigt werden,

$$\gamma_{xx} = 2\,c_1 y - c_1^2 y^2. \tag{78}$$

Der Ansatz (76) führt damit auf dieselben Verzerrungen wie der Ansatz (72). Mit (78) werden die Tensorinvarianten, wenn γ_{yy} vernachlässigt wird,

$$\bar{J}_1 = c_1 y - \frac{1}{2}\,c_1^2 y^2, \qquad \bar{J}_2 = 0. \tag{79}$$

Die Kompressionsfunktion und die Schubfunktion werden mit (79)

$$\left.\begin{aligned} f_2\left(\frac{1}{3}\,J_1\right) &= e_0 + e_1\sqrt{\frac{2}{3}}\left(c_1 y - \frac{1}{2}\,c_1^2 y^2\right) + \cdots,\\ g\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}\,J_1^2 - J_2}\right) &= g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left|c_1 y - \frac{1}{2}\,c_1^2 y^2\right|\right) = g_0 + g_1\sqrt{\frac{2}{3}}\left|c_1 y - \frac{1}{2}\,c_1^2 y^2\right| + \cdots.\end{aligned}\right\}\tag{80}$$

Geht man mit (80) und (78) in (68) ein, so erhält man, wenn bei den Reihenentwicklungen nur die beiden ersten Glieder berücksichtigt werden,

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x = {} & \frac{1}{3}\left(2\,c_1\,y - c_1^2\,y^2 - \frac{1}{2}\,\gamma_{yy}\right)\left[g_0 + g_1\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\left|c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right|\right)\right] \\ & + \frac{1}{3}\left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2 + \frac{1}{2}\,\gamma_{yy}\right)\left[e_0 + e_1\sqrt{\frac{2}{3}}\left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\right].\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y = {} & \frac{1}{6}\,(2\,\gamma_{yy} - 2\,c_1\,y + c_1^2 y^2)\left[g_0 + g_1\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\left|c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right|\right)\right] \\ & + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\,\gamma_{yy} + c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\left[e_0 + e_1\sqrt{\frac{2}{3}}\left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\right].\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Vernachlässigt man den Einfluß der Querkraft, so ist

$$\sigma_y \equiv 0\,.$$

Aus (82) kann dann γ_{yy} bestimmt werden:

$$\gamma_{yy} = \left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\frac{g - e_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\left[g_1\left|c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right| - e_1\left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\right]}{g_0 + \frac{1}{2}\,e_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\left[g_1\left|e_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right| + \frac{1}{2}\,e_1\left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\right]}\,. \tag{83}$$

Setzt man (83) in (81) ein, so kommt

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x = {} & \frac{1}{3}\left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\left\{2\,g_0 + e_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\left[2\,g_1\left|c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right| + e_1\left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\right]\right\} \\ & - \frac{1}{3}\left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\left\{g_0 - e_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\left[g_1\left|c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right| - e_1\left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\right]\right\} \\ & \times \frac{g_0 - e_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\left[g_1\left|c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right| - e_1\left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\right]}{2g_0 + e_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\left[2\,g_1\left|c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right| + e_1\left(c_1\,y - \frac{1}{2}\,c_1^2\,y^2\right)\right]}.\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Aus (84) erhält man durch Reihenentwicklung nach c^n, wenn c^n $(n > 2)$ vernachlässigt wird,

$$\sigma_x = \frac{1}{3}\,c_1\,y\,\frac{(2\,g_0 + e_0)^2 - (g_0 - e_0)^2}{2\,g_0 + e_0} + c_1^2\,y\,|y|\,\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\,g_0\,g_1}{2\,g_0 + e_0} + \frac{1}{3}\,c_1^2\,y^2[\cdots]\,. \tag{85}$$

Mit (85) wird das auf einen Querschnitt $x =$ konst. ausgeübte Moment

$$M(x) = \int_{-h/2}^{+h/2} y\,\sigma_x\,dy = A\,c_1 + B\,c_1^2\,, \tag{86}$$

wobei

$$A = \frac{h^3}{36}\,\frac{(2\,g_0 + e_0)^2 - (g_0 - e_0)^2}{2\,g_0 + e_0}\,, \qquad B = \frac{h^4}{32}\,\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\,g_0\,g_1}{2\,g_0 + e_0}$$

gesetzt ist.

Aus (86) ergibt sich

$$c_1 = -\frac{A}{2\,B} + \sqrt{\frac{A^2}{4\,B^2} + \frac{M(x)}{B_0}}\,. \tag{87}$$

Setzt man (87) in (76) ein, so kommt

$$\varepsilon_x = \left(-\frac{A}{2\,B} + \sqrt{\frac{A^2}{4\,B^2} + \frac{M(x)}{B_0}}\right)y\,. \tag{88}$$

Mit der in der technischen Balkenbiegungslehre üblichen Annahme ist

$$\frac{dx}{\varrho} = \frac{\varepsilon_x\,dx}{y} = \left(-\frac{A}{2\,B} + \sqrt{\frac{A^2}{4\,B^2} + \frac{M(x)}{B}}\right)dx\,. \tag{89}$$

Bezeichnet man mit ξ die Durchbiegung der Platine, so erhält man aus (89)

$$\frac{\frac{d^2\xi}{d^2x}}{\left(1+\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = -\frac{A}{2B} + \sqrt{\frac{A^2}{4B^2} + \frac{M(x)}{B}} \,. \tag{90}$$

Da in (88) ε nicht mehr klein von erster Ordnung ist, kann in (90) die Krümmung ϱ nicht durch die zweite Ableitung ersetzt werden. Die Annahme

$$\frac{1}{\varrho} \approx \frac{d^2\xi}{dx^2}$$

führt auf eine Theorie erster Ordnung.

Setzt man

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2\xi}{dx^2}\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \cdots\right)$$

in (90) ein und entwickelt den Wurzelausdruck in eine Potenzreihe, so erhält man

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{1}{A}M(x) - \frac{B}{A^3}M^2(x) + \cdots . \tag{91}$$

Beschränkt man sich in (91) auf Glieder erster Ordnung, so geht (91) in die bekannte Differentialgleichung der technischen Biegelehre über. Die Lösung der Differentialgleichung (91) wird am zweckmäßigsten mit Hilfe der Störungsrechnung durchgeführt.

(Eingegangen am 3. November 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *H. Jung*, Stuttgart-N, Robert-Mayer-Str. 66.

Zur Berechnung von Pendel-Schwingungstilgern.

Von **K. Desoyer** und **A. Slibar.**

1. Einleitung. Als Fliehkraftpendel ausgeführte Schwingungstilger werden nach den einführenden Arbeiten von *R. Sarazin*[1], *E. S. Taylor*[2] und *O. Kraemer*[3] sowie weiteren Untersuchungen verschiedener Autoren[4] im modernen Motorenbau immer mehr verwendet. *W. Schick*[4] rechnet unter der Voraussetzung kleiner Pendelausschläge die Einwirkung von mehreren Fliehkraftpendeln auf eine einfach zusammenhängende elastische Kette als Ersatzsystem für die gegebene Kurbelwellenanordnung eines Reihenmotors. *A. Kimmel* und *I. Lutzweiler*[4] führen diese Näherungsrechnung für eine als mehrfach zusammenhängende elastische Kette aufgefaßte Kurbelwelle[5] durch. Die Rechnung führt in beiden Fällen zu der als „Abstimmbedingung" bekannten Beziehung

$$\Omega^2 = \frac{L}{l}\,\omega_0^2 \tag{1}$$

zwischen der Kreisfrequenz Ω der erregenden Momente, der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_0 der Welle und den Abmessungen L und l (siehe Abb. 1). Da die Kreisfrequenz Ω der erregenden Momente ein ν-faches der Winkelgeschwindigkeit ω_0 der Maschine ist, vereinfacht sich die Gleichung (1) zu:

$$\nu^2 = \frac{L}{l}\,. \tag{1a}$$

ν durchläuft dabei für Zweitaktmaschinen die Werte 1, 2, 3, . . ., für Viertaktmaschinen die Werte $^1/_2$, 1, $1^1/_2$, 2, $2^1/_2$, . . .

Bis jetzt wurde angegeben, zur Erreichung einer befriedigenden Wirkung derartiger Fliehkraftpendel die Gleichung (1a) je nach der zu tilgenden Ordnung einzuhalten und im übrigen die Masse des Fliehkrafttilgers möglichst groß auszuführen[6]. Eine genaue Angabe für die günstigste Masse des Tilgers zu liefern, waren die bisherigen Näherungen nicht imstande, da bei Annahme kleiner Pendelausschläge in den damit linearisierten Bewegungsgleichungen der von der Corioliskraft herrührende Term nicht mehr auftritt. Gerade dieser Term aber ist es, der die Bedingung für die Bestimmung der optimalen Pendelmasse liefert. Dies soll im folgenden, zunächst für den einfachen Fall des als mathematisches Pendel aufgefaßten Tilgers, gezeigt werden[7].

2. Die Bewegungsgleichungen. Der Rechnung liegt eine Anordnung gemäß Abb. 1 zu Grunde. An einer Schwungmasse vom Trägheitsmoment J sei im Abstand L von der Drehachse ein Pendel der Masse m und der Länge l reibungslos angelenkt. Auf die Schwungmasse wirke ein äußeres Drehmoment

$$M = M_0 + \Delta M \sin \nu \varphi\,, \tag{2}$$

wovon der konstante Betrag M_0 zur Aufrechterhaltung der konstanten mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_0 der Schwungmasse, also zur Überwindung der Arbeitswiderstände, abgespaltet werde. Die Bedeutung der weiteren Bezeichnungen geht aus Abb. 1 hervor.

Die Bewegungsgleichungen für die Bewegung eines Massenpunktes m in einem rotierenden System lauten in vektorieller Schreibweise bekanntlich:

$$m\,\mathfrak{b}_{rel} = \sum \mathfrak{P} + m\,(\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{w}}) + m\,(\mathfrak{w} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{w} + 2\,m(\mathfrak{v}_{rel} \times \mathfrak{w})\,. \tag{3}$$

---

[1] *R. Sarazin*, D.R.P. 597091.

[2] *E. S. Taylor*, J. Soc. automot. Engr. **38** (1936), S. 81.

[3] *O. Kraemer*, Z. VDI **82** (1938), S. 1297, Z. VDI **83** (1939), S. 901, Motortechn. Z. **1** (1939), S. 3.

[4] *W. Schick*, Ing.-Arch. **10** (1939), S. 303; *A. Kimmel* und *I. Lutzweiler*, Ing.-Arch. **12** (1941), S. 100; *R. Lambrich*, Das Fliehkraftresonanzpendel. Jb. dtsch. Luftfahrtforschung 1940, S. 1170; *H. Kammerer*, Die Eigenfrequenzkurven bei Drehschwingungssystemen mit Fliehkraftpendeln. Jb. dtsch. Luftfahrtforschung 1940, S. 1180.

[5] *R. Grammel*, *K. Klotter* und *K. v. Sanden*, Ing.-Arch. **7** (1936), S. 439.

[6] *H. Schrön*, Die Dynamik der Verbrennungskraftmaschine, Wien 1947; *K. Haug*, Die Drehschwingungen von Kolbenmaschinen, Berlin 1952.

[7] Die Behandlung des Tilgers als physikalisches Pendel soll später erfolgen.

Darin bedeuten $\mathfrak{v}_{rel}$ bzw. $\mathfrak{b}_{rel}$ die Relativgeschwindigkeit bzw. die Relativbeschleunigung des Massenpunktes m gegenüber dem rotierenden System, ferner $\mathfrak{w}$ bzw. $\dot{\mathfrak{w}}$ den Vektor der Winkelgeschwindigkeit bzw. der Winkelbeschleunigung des rotierenden Führungssystems und $\mathfrak{r}$ den vom Drehpunkt des Führungssystems zum Massenpunkt weisenden Radiusvektor, $\times$ das vektorielle Produkt. Die Terme auf der rechten Seite von (3) bedeuten

$\sum \mathfrak{P}$ die vektorielle Summe aller an der Masse m wirkenden physikalischen Kräfte,

$m(\mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{w}})$ die zufolge der Winkelbeschleunigung des Führungssystems auftretende Scheinkraft,

$m(\mathfrak{w}\times\mathfrak{r})\times\mathfrak{w}$ die Fliehkraft,

$2\,m(\mathfrak{v}_{rel}\times\mathfrak{w})$ die Corioliskraft.

Die Orientierungen, Richtungen und Beträge der drei letztgenannten Scheinkräfte sind in Abb. 1 eingetragen. Sieht man wie üblich vom Gewicht des Pendels ab und spaltet man die Gleichung (3) in Komponenten in Richtung $\overline{BA}$ bzw. senkrecht dazu auf, so folgen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} m\,l\,\dot{\vartheta}^2 &= S + m r\,\dot{\omega}\sin\psi - m r\,\omega^2\cos\psi - 2\,m\,l\,\omega\,\dot{\vartheta}\,,\\ m\,l\,\ddot{\vartheta} &= -\,m\,r\,\dot{\omega}\cos\psi - m r\omega^2\sin\psi\,,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

worin S die Stabkraft im Pendel bedeutet. Aus Abb. 1 liest man die Beziehungen ab:

$$\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}=\frac{L}{r}\,,\quad r\cos\psi = l + L\cos\vartheta\,. \tag{4}$$

Die Bewegungsgleichung für die Schwungmasse mit angekoppeltem Pendel lautet

$$J\,\dot{\omega} = \Delta M\sin\nu\varphi + S\,L\sin\vartheta\,. \tag{5}$$

Aus (3), (4) und (5) folgt

$$\left.\begin{aligned} &(J + m\,L^2\sin^2\vartheta)\,\dot{\omega} = \Delta M\sin\nu\varphi\\ &\quad + Lm\sin\vartheta\,.\,[l\dot{\vartheta}^2 + \omega^2(l + L\cos\vartheta)\\ &\quad + 2\,l\,\omega\,\dot{\vartheta}],\\ &l\,\ddot{\vartheta} + \dot{\omega}\,(l + L\cos\vartheta) + \omega^2 L\sin\vartheta = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Trennt man die Winkelgeschwindigkeit ω in den konstanten Anteil ω_0 und die Störung $\Delta\omega$:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega\,, \tag{7}$$

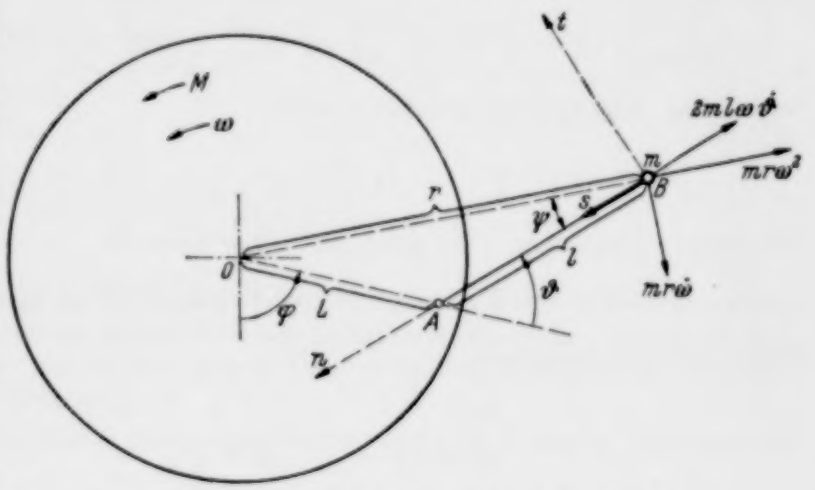

Abb. 1. Schema eines Fliehkraftpendels an einer Drehmasse.

dann ist wegen $\dot{\omega}_0 = 0$ die Größe $\dot{\omega}$ durch $\Delta\dot{\omega}$ zu ersetzen. Führt man (7) in (6) ein und streicht wie üblich $\Delta\omega$ gegen ω_0, so folgt

$$\left.\begin{aligned} &(J + m\,L^2\sin^2\vartheta)\,\Delta\dot{\omega} = \Delta M\sin\nu\,\omega_0\,t + Lm\sin\vartheta\cdot[l\,\dot{\vartheta}^2 + \omega_0^2(l + L\cos\vartheta) + 2\,l\,\omega_0\,\dot{\vartheta}]\,,\\ &l\,\ddot{\vartheta} + \Delta\dot{\omega}(l + L\cos\vartheta) + \omega_0^2\,L\sin\vartheta = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

3. Aussagen der linearisierten Gleichungen: Wird in den Gleichungen (6′) der Ausschlagwinkel ϑ als klein angenommen, so gewinnt man die linearisierten Gleichungen in der Form:

$$\left.\begin{aligned} &J\Delta\dot{\omega} = \Delta M\sin\nu\,\omega_0 t + m\,L(L + l)\,\omega_0^2\,\vartheta\,,\\ &l\,\ddot{\vartheta} + (L + l)\,\Delta\dot{\omega} + L\,\omega_0^2\,\vartheta = 0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

mit den für den stationären Vorgang gültigen partikulären Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= -\,\frac{\Delta M\cdot(L + l)}{\omega_0^2\,[J(L - \nu^2 l) + m\,L(L + l)^2]}\sin\nu\,\omega_0\,t\,,\\ \Delta\omega &= -\,\frac{\Delta M\cdot(L - \nu^2 l)}{\nu\,\omega_0[J(L - \nu^2 l) + m\,L(L + l)^2]}\cos\nu\,\omega_0\,t\,.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die zweite Gleichung (9) liefert die bekannte Abstimmbedingung (1a), jedoch bei erfüllter Abstimmbedingung keine Aussage über die Größe der optimalen Pendelmasse; für nicht erfüllte Abstimmbedingung folgt daraus die bekannte Richtlinie, die Masse m möglichst groß zu machen.

4. Lösungen für größere Pendelausschläge. Führt man in die nicht linearisierten Gleichungen (6′) die dimensionslosen Abkürzungen ein:

$$\frac{l}{L}=\lambda\,,\qquad \frac{m\,L^2}{J}=\Theta\,,\qquad \frac{\Delta M}{J\,\omega_0^2}=K\,,\qquad \omega_0\,t=\tau \tag{10}$$

und kennzeichnet man die Ableitung $d/d\tau$ durch einen Strich, so nimmt das System (6′) die Form an:

$$\left.\begin{aligned}(1+\Theta\sin^2\vartheta)\cdot\Delta\omega' &= \omega_0 K\sin\nu\,\tau+\omega_0\,\Theta\sin\vartheta\cdot[\lambda\,\vartheta'^2+\lambda+\cos\vartheta+2\,\lambda\,\vartheta']\,,\\ \Delta\omega' &= -\,\omega_0\,\frac{\lambda\,\vartheta''+\sin\vartheta}{\lambda+\cos\vartheta}\,.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Berücksichtigt man, daß ϑ, im Bogenmaß gemessen, praktisch stets kleiner als 1 ist und verwendet man demzufolge die Entwicklungen

$$\sin\vartheta\approx\vartheta-\frac{\vartheta^3}{6}\,,\qquad \cos\vartheta\approx 1-\frac{\vartheta^2}{2}\,,$$

so geht die zweite Gleichung (11) mit

$$\frac{1}{\lambda+\cos\vartheta}\approx\frac{1}{1+\lambda}\left(1+\frac{1}{1+\lambda}\,\frac{\vartheta^2}{2}\right)$$

über in

$$\frac{\Delta\omega'}{\omega_0}=c_1\vartheta''+c_2\vartheta+c_3\vartheta^3+c_4\vartheta''\vartheta^2\,, \tag{12}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$c_1=-\frac{\lambda}{1+\lambda}\,,\qquad c_2=-\frac{1}{1+\lambda}\,,\qquad c_3=-\frac{2-\lambda}{6(1+\lambda)^2}\,,\qquad c_4=-\frac{\lambda}{2(1+\lambda)^2}\,. \tag{12a}$$

Die erste Gleichung (11) geht mit (12) über in

$$a_1\vartheta''+a_2\vartheta+a_3\vartheta^3+a_4\vartheta''\vartheta^2+a_5\vartheta'^2\vartheta+a_6\vartheta'\vartheta=K\sin\nu\,\tau\,, \tag{13}$$

wenn die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} a_1&=c_1\,, & a_4&=c_4+c_1\Theta\,,\\ a_2&=c_2-(1+\lambda)\Theta\,, & a_5&=-\lambda\,\Theta\,,\\ a_3&=c_3+\frac{\Theta}{6}(6\,c_2+4+\lambda)\,, & a_6&=-\,2\,\lambda\,\Theta \end{aligned}\right\} \tag{13a}$$

verwendet werden.

Die Gleichung (13) stellt eine nichtlineare Differentialgleichung für $\vartheta(\tau)$ dar, deren für den stationären Vorgang gültige partikuläre Lösung im folgenden durch Iteration gefunden wird. Eine partikulare Lösung des linearen Anteiles von (13)

$$a_1\vartheta_1''+a_2\vartheta_1=K\sin\nu\,\tau$$

ist

$$\vartheta_1=\frac{1}{a_2-\nu^2\,a_1}\,K\sin\nu\,\tau\,. \tag{14}$$

Bringt man in (13) die nichtlinearen Terme auf die rechte Seite und setzt hierin für ϑ und dessen Ableitungen die erste Näherung ϑ_1 gemäß (14) ein, so ergibt sich für die zweite Näherung ϑ_2 die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} a_1\vartheta_2''+a_2\vartheta_2 &= K\sin\nu\,\tau-\frac{a_3-\nu^2\,a_4}{(a_2-\nu^2 a_1)^3}\,K^3\sin^3\nu\,\tau\\ &\quad-\frac{\nu^2\,a_5}{(a_2-\nu^2\,a_1)^3}\,K^3\cos^2\nu\,\tau\,\sin\nu\,\tau-\frac{\nu\,a_6}{(a_2-\nu^2\,a_1)^2}\,K^2\sin\nu\,\tau\cos\nu\,\tau\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Diese läßt sich mit Hilfe der Identitäten

$$\left.\begin{aligned} 2\sin\alpha\sin\beta &\equiv\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\,,\\ 2\sin\alpha\cos\beta &\equiv\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

auf die Form

$$\left.\begin{aligned} a_1\vartheta_2'' + a_2\vartheta_2 = &\left[K - \frac{3(a_3 - \nu^2 a_4) + \nu^2 a_5}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^3} K^3\right] \sin \nu\tau \\ &- \frac{\nu a_6}{2(a_2 - \nu^2 a_1)^2} K^2 \sin 2\nu\tau + \frac{a_3 - \nu^2(a_4 + a_5)}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^3} K^3 \sin 3\nu\tau \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

bringen. Der Ansatz

$$\vartheta_2 = C_1 \sin \nu\tau + C_2 \sin 2\nu\tau + C_3 \sin 3\nu\tau$$

liefert die partikuläre Lösung von (17):

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_2 = &\left[\frac{K}{a_2 - \nu^2 a_1} - \frac{3(a_3 - \nu^2 a_4) + \nu^2 a_5}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^4} K^3\right] \sin \nu\tau - \frac{\nu a_6}{2\,[a_2 - (2\nu)^2 a_1]\,(a_2 - \nu^2 a_1)^2} K^2 \sin 2\nu\tau \\ &+ \frac{a_3 - \nu^2(a_4 + a_5)}{4\,[a_2 - (3\nu)^2 a_1]\,(a_2 - \nu^2 a_1)^3} K^3 \sin 3\nu\tau\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Durch weitere Iterationen ließe sich auf diesem Wege eine beliebig lange *Fourier*reihe für $\vartheta(\tau)$ gewinnen. Wir wollen uns zur Bestimmung der optimalen Pendelmasse im folgenden mit der Näherung ϑ_2 begnügen.

Setzt man den so erhaltenen Ausdruck (18) in die Gleichung (12) ein, so geht diese mit den Identitäten (16), wenn man nur die Glieder bis einschließlich dritter Ordnung in K berücksichtigt, nach Integration nach τ über in

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = &-\frac{1}{\nu}\left\{\frac{c_2 - \nu^2 c_1}{a_2 - \nu^2 a_1} K - (c_2 - \nu^2 c_1)\frac{[3(a_3 - \nu^2 a_4) + \nu^2 a_5]}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^4} K^3 + \frac{3(c_3 - \nu^2 c_4)}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^3} K^3\right\} \cos \nu\tau \\ &+ \frac{[c_2 - (2\nu)^2 c_1]\, a_6}{4\,[a_2 - (2\nu)^2 a_1]\,(a_2 - \nu^2 a_1)^2} K^2 \cos 2\nu\tau \\ &- \frac{1}{12\nu}\left\{\frac{[c_2 - (3\nu)^2 c_1]\,[a_3 - \nu^2(a_4 + a_5)]}{[a_2 - (3\nu)^2 a_1]\,(a_2 - \nu^2 a_1)^3} - \frac{c_3 - \nu^2 c_4}{(a_2 - \nu^2 a_1)^3}\right\} K^3 \cos 3\nu\tau\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Die Rechtfertigung für die Streichung der höheren Potenzen von K folgt sofort aus einer Größenabschätzung für diesen Parameter an Hand von ausgeführten Motoren. K ergibt sich danach in der Größenordnung von 10^{-5} bis 10^{-3} je nach Tangentialdruckdiagramm, Kurbelwellenkonstruktion und Drehzahl der Maschine.

Die Gleichung (19) zeigt, daß sich das Glied erster Größenordnung in K durch Erfüllen der bekannten Abstimmbedingung

$$1 - \nu^2\lambda = 0\,, \qquad \left(\lambda = \frac{l}{L}\right) \tag{1a}$$

tilgen läßt, da nach (12a) und (13a)

$$\frac{c_2 - \nu^2 c_1}{a_2 - \nu^2 a_1} = \frac{1 - \nu^2\lambda}{(1 - \nu^2\lambda) + (1 + \lambda)^2\Theta}$$

ist. Weiter aber erweist sich, daß das Glied der zweiten Größenordnung in K, welches von den Corioliskräften herrührt, durch entsprechende Wahl der Pendelmasse m (d. h. des Parameters Θ) zu einem Minimum gemacht werden kann. Nach Erfüllung der Bedingung (1a) bleibt nämlich nach Einsetzen von a_1 bis a_6 bzw. c_1 bis c_4 nach (13a) bzw. (12a) in (19) für die Störung $\Delta\omega$ der Winkelgeschwindigkeit der Maschine:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = &\frac{\nu^7}{8(\nu^2 + 1)^4\Theta^3} K^3 \cos \nu\tau + \frac{3\nu^6}{2(\nu^2 + 1)^2\Theta\,[(\nu^2 + 1)^2\Theta - 3\nu^4]} K^2 \cos 2\nu\tau \\ &- \frac{\nu^7 \cdot [(3\nu)^2 + 1]}{8(\nu^2 + 1)^3\Theta^2\,[(\nu^2 + 1)^2\Theta - 8\nu^4]} K^3 \cos 3\nu\tau\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Differentiiert man somit den Koeffizienten von $K^2 \cos 2\nu\tau$ in (20) nach dem Parameter Θ und setzt diesen Differentialquotienten gleich Null, so ergibt sich

$$-\frac{3\nu^6}{2(\nu^2 + 1)^2}\,\frac{(\nu^2 + 1)^2 \cdot 2\Theta - 3\nu^4}{\Theta^2[(\nu^2 + 1)^2\Theta - 3\nu^4]^2} = 0 \tag{21}$$

und daraus für die optimale Pendelmasse wegen (10) die Beziehung

$$\Theta_{opt} = \frac{m_{opt} L^2}{J} = \frac{3\nu^4}{2(\nu^2 + 1)^2}\,. \tag{22}$$

Die Gleichung (22) liefert z. B. für $\nu = 1$: $m_{opt} = \frac{3}{8}\frac{J}{L^2}$,

für $\nu = 2$: $m_{opt} = \frac{24}{25}\frac{J}{L^2}$.

Durch Einsetzen von (22) in (20) ergibt sich bis auf die Glieder mit vierten und höheren Potenzen von K das so erreichbare Minimum der Winkelgeschwindigkeitsschwankung der Anordnung zu

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_{min} = \frac{(\nu^2+1)^2}{27\,\nu^5} K^3 \cos \nu\,\omega_0 t - \frac{2}{3\,\nu^2} K^2 \cos 2\,\nu\,\omega_0 t + \frac{\nu^2+1}{117\,\nu^5}[(3\,\nu)^2+1] \cdot K^3 \cos 3\,\nu\,\omega_0 t\,. \quad (23)$$

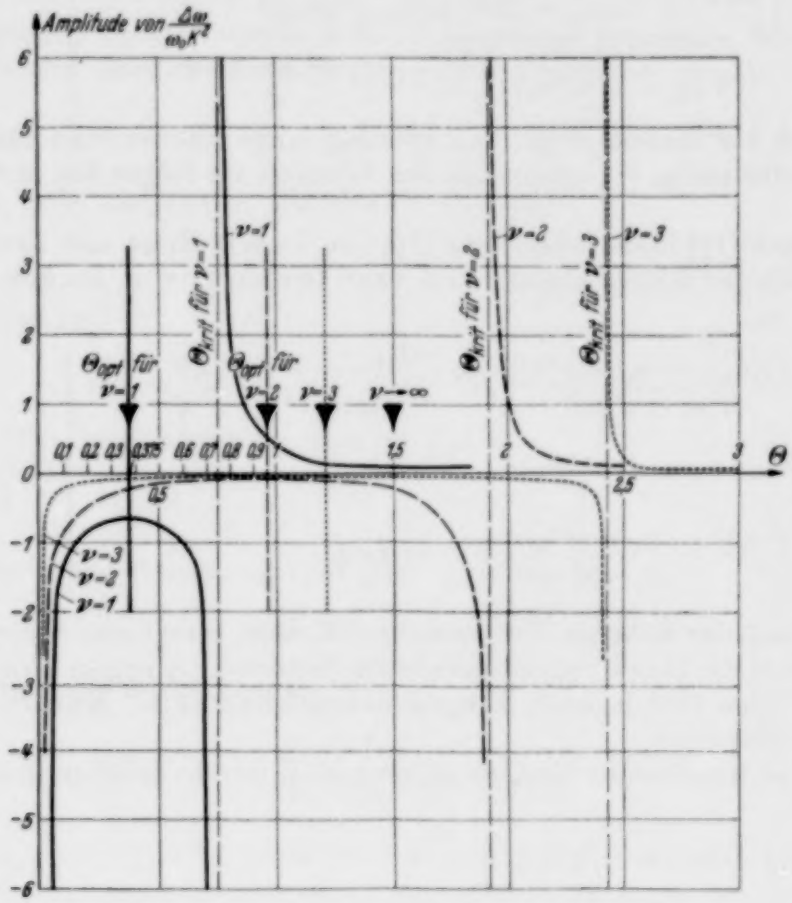

Abb. 2. Die Amplitude von $\frac{\Delta\omega}{\omega_0 \cdot K^2}$ als Funktion des Parameters $\Theta = \frac{m \cdot L^2}{J}$.

In Abb. 2 ist ohne Berücksichtigung der Glieder mit K^3 für erfüllte Abstimmbedingung (1a) die Amplitude der dimensionslosen Größe $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0 K^2}\right)$ als Funktion des Parameters $\Theta = \frac{mL^2}{J}$ für die Werte $\nu = 1, 2, 3$ aufgetragen. Es zeigt sich, daß entgegen der bisher üblichen Auffassung, möglichst große Pendelmassen zu verwenden, die jeweils doppelten Werte der optimalen Pendelmassen unerwünschte Resonanzen hervorrufen. Für höhere Werte von ν konvergiert Θ_{opt} gegen 3/2, Θ_{krit} gegen 3.

5. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wird die Einwirkung eines an einer Drehmasse angelenkten Fliehkrafttilgers, der als mathematisches Pendel aufgefaßt wird, für große Pendelausschläge untersucht. Das besondere Interesse gilt dabei der Auffindung einer Bestimmungsgleichung für die anzubringende günstigste Pendelmasse. Die Rechnung zeigt, daß sich Beziehungen für deren Bestimmung erst ergeben, wenn man den von den Corioliskräften herrührenden Term in den Bewegungsgleichungen des Systems berücksichtigt. Entgegen der bisherigen Auffassung, günstigste Wirkung sei durch möglichst große Pendelmasse bei erfüllter Abstimmbedingung $L/l = \nu^2$ zu erzielen, erweist die Rechnung die Existenz von optimalen Werten für die anzubringende Pendelmasse und zeigt weiter, daß die doppelten dieser Werte zu unerwünschten Resonanzen führen.

Die Erweiterung der vorstehenden Betrachtungen auf die Wirkung bei Anlenkung von mehreren Tilgern an elastische zusammenhängende Ketten (als Reduktionsergebnis einer Kurbelwelle) soll in einer nachfolgenden Arbeit gezeigt werden.

(Eingegangen am 10. November 1952.)

Anschrift der Verfasser: Dr. *K. Desoyer* und Dozent Dr. *A. Slibar*, Wien IV, Karlsplatz 13, Technische Hochschule.

Zur Theorie der Photonenraketen.

Von E. Sänger.

1. Einleitung. Wenn man die technische Beherrschung stationärer Kernreaktionen voraussetzt, begegnet deren direkte Ausnützung in Raketen bei den Teilchengeschwindigkeiten von etwa 4 bis 12% der Lichtgeschwindigkeit, entsprechend spezifischen Impulsen zwischen 1220 und 3660 Sekundentonnen Antrieb je Kilogramm Treibstoff, der bekannten Schwierigkeit, daß sich die schnellen Reaktionsprodukte mit technischen Mitteln nicht in eine gewünschte Richtung lenken lassen.

Es wird daher oft erwogen, die Energie der Kerntreibstoffe auf weitere, inerte Massen zu übertragen, die sich mechanisch oder elektrisch in die gewünschte Richtung lenken lassen, und diese mit geringerer Geschwindigkeit auszustoßen, z. B. in thermischen Atomraketen mit spezifischen Impulsen bis etwa 2 secton/kg oder in elektrischen Ionenraketen mit etwa 10 secton/kg, gegenüber den bekannten Werten chemischer Raketen von nur etwa 0,3 secton/kg.

Daneben besteht jedoch noch der hier näher untersuchte grundsätzliche, umgekehrte Weg, die Energie der Kernreaktion nur auf einen Teil der Kerntreibstoff-Massen zu übertragen, und diesen Teil mit höherer, z. B. Lichtgeschwindigkeit auszustoßen, entsprechend spezifischen Impulsen von etwa 24 bis 216 secton/kg, während der nichtbeschleunigte, verbrauchte Treibstoffteil geschwindigkeitslos von Bord gegeben, oder an Bord behalten wird.

Für derartige partielle Photonenraketen erscheinen technische Lösungsmöglichkeiten in absehbarer Zukunft nicht völlig ausgeschlossen, z. B. wenn es gelingt, die Kernreaktionsenergie in „Kernlampen" nach Art elektrischer Gasentladungslampen weitgehend in Photonen zu verwandeln und diese mit optischen Mitteln, etwa „Reflektoren" höchsten Reflektionsvermögens in die gewünschte Richtung zu lenken.

Sie versprechen gegenüber thermischen Atomraketen geringeren spezifischen Treibstoffverbrauch und gegenüber elektrischen Ionenraketen besonders geringere spezifische Triebwerksgewichte, so daß sich mit ihnen Aussichten auf Fluggeschwindigkeiten von mehreren hundert Kilometern in der Sekunde eröffnen.

Vom Vorgang der Beschleunigung einer gegebenen Ruhemasse m_0 unter Energiezufuhr, z. B. der Beschleunigung eines Elektrons in der Elektronenschleuder, ist bekannt, daß mit Annäherung der Bewegungsgeschwindigkeit w an die Lichtgeschwindigkeit c bei gleichbleibender Ruhemasse m_0 sowohl die träge Masse $m_t = m_0/\sqrt{1-w^2/c^2}$ als auch die kinetische Energie und der Impuls nach Unendlich gehen, also die Energiezufuhr schließlich unendlich groß werden müßte, so daß bei diesem Vorgang die Lichtgeschwindigkeit nicht erreicht werden kann.

Wesentlich verschieden davon stellt sich der hier zu behandelnde Fall einer adiabatischen Beschleunigung der gegebenen Ruhemasse m_0 ohne äußere Energiezufuhr, also auf Kosten des Energieinhaltes der Ruhemasse selbst dar, wie er z. B. dem Raketenprinzip inhärent ist.

Dabei nähert sich mit abnehmender Ruhemasse m_0' die Bewegungsgeschwindigkeit w ebenfalls der Lichtgeschwindigkeit c, um sie bei verschwindender Ruhemasse m_0' tatsächlich zu erreichen, während die träge Masse m_t während des ganzen Beschleunigungsvorganges konstant und gleich der Anfangsruhemasse m_0 bleibt.

Infolge des Äquivalenzprinzipes von Masse und Energie $E = m_0 c^2$ gilt jederzeit die Adiabatenbedingung

$$E = m_0 c^2 = m_t c^2 = m_0' c^2 + (m_0 - m_0')c^2 = \text{konst} \qquad (1)$$

Wir sprechen im Grenzfall $m_0' \to 0$ von Zerstrahlung der Materie und nennen das entstandene lichtschnelle Partikel ein Photon, dem also wohl träge Masse, aber keine Ruhemasse mehr zukommt.

2. Totalraketen. Man kann einer im Zustand der Ruhe gegebenen Masse m_0 einen latenten Energieinhalt $m_0 c^2$ und einen latenten Impuls $m_0 c$ zuschreiben, ähnlich, wie man einem Photon der trägen Masse $h\nu/c^2$ die Energie $h\nu$ und den Impuls $h\nu/c$ beilegt.

In der folgenden Raketentheorie spielen die Bruchteile E' bzw. J' des latenten Energie- bzw. Impulsinhaltes, die man technisch nutzbar machen kann, eine grundlegende Rolle.

Wir wollen diese beiden Ausbeuten mit den Sigeln

$$\varepsilon = E'/m_0 c^2 \quad \text{für die Energieausbeute} \tag{2}$$

und

$$\iota = J'/m_0 c \quad \text{für die Impulsausbeute} \tag{3}$$

bezeichnen.

Der in der Raketentechnik übliche spezifische Impuls ist dann

$$J'/m_0 = \iota c \tag{4}$$

bzw. der spezifische Treibstoffverbrauch je Impuls- oder Antriebseinheit

$$m_0/J' = 1/\iota c\,. \tag{5}$$

Aktiviert man einen Bruchteil ε dieser latenten Energie $m_0 c^2$ der Ruhemasse m_0, entzieht ihn aber nicht dem System, sondern verwandelt ihn vollständig in kinetische Energie der gesamten restlichen Ruhemasse $m_0' = (1 - \varepsilon)\, m_0$, so wird die erreichbare Bewegungsgeschwindigkeit w im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit c aus der Adiabatenbedingung und dem bekannten Verhältnis $\sqrt{1 - w^2/c^2}$ von Ruhemasse m_0' zu träger Masse m_0 gleich

$$w/c = \sqrt{1 - m_0'^2/m_0^2} = \sqrt{2\,\varepsilon - \varepsilon^2}\,, \qquad \text{bzw.} \qquad \varepsilon = 1 - \sqrt{1 - w^2/c^2} \tag{6}$$

Die kinetische Energie ist gleich der aktivierten Energie

$$E' = \varepsilon\, m_0 c^2 = (m_0 - m_0')\, c^2 = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 - w^2/c^2}\right). \tag{7}$$

Der gewonnene Impuls ist

$$J' = m_0' w + \varepsilon\, m_0 w = m_0 w = m_0 c \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}\,, \tag{8}$$

daher die Impulsausbeute

$$\iota = J'/m_0 c = \sqrt{2\,\varepsilon - \varepsilon^2} = w/c\,, \tag{8a}$$

damit ist der spezifische Impuls

$$J'/m_0 = \iota \cdot c = c \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} = w \tag{8b}$$

und der Impuls je Einheit des Energieaufwandes

$$J'/E' = \sqrt{2/\varepsilon - 1}/c = \frac{1}{c}\,\frac{w/c}{1 - \sqrt{1 - w^2/c^2}} \tag{8c}$$

Mit wachsender Energieausbeute ε wird daher der Impulsgewinn je aufgewendeter Masse immer größer, je aufgewendeter Energie immer kleiner.

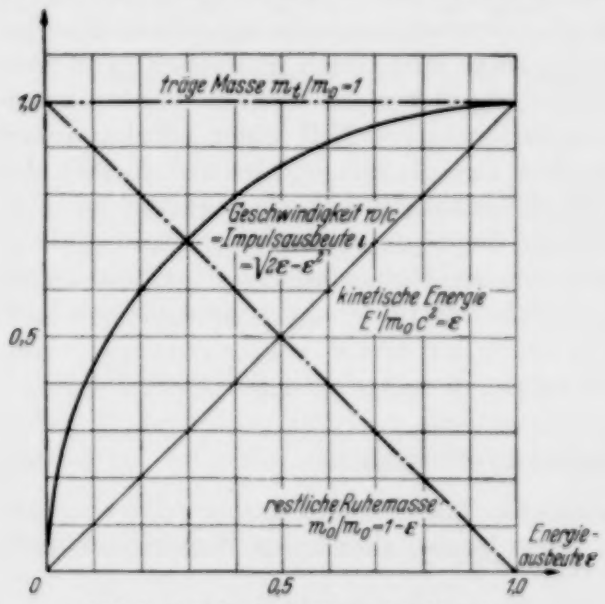

Abb. 1. Adiabatische Massenbeschleunigung in Totalraketen.

Diese Verhältnisse der adiabatischen Beschleunigung einer Masse sind in Abb. 1 graphisch dargestellt.

Während mit wachsender Energieausbeute ε die erreichte Strahlgeschwindigkeit w/c in einem Kreisbogen zunächst rasch, später langsamer wächst, und die beschleunigte, unverwandelte Ruhemasse m_0' linear mit ε abnimmt, bis sie bei völliger Zerstrahlung schließlich verschwindet, bleibt die träge Masse m_t dauernd gleich m_0 und konstant. Dementsprechend wächst der gewonnene Impuls wie w/c.

Im nichtrelativistischen Bereich kleiner Energieausbeuten ε wächst der Impuls sehr rasch mit der aufgewendeten Energie, der Antrieb je aufgewendeter Energieeinheit ist günstig, je aufgewendeter Masseneinheit ungünstig. Bei hohen ε kehren sich diese Verhältnisse um.

Schon relativ kleine Energieausbeuten ergeben verhältnismäßig hohe Impulsausbeute, z. B. chemische Reaktionen mit $\varepsilon \doteq \frac{1}{2} \cdot w^2/c^2 \sim 10^{-10}$ ein $\iota \doteq \sqrt{2\,\varepsilon} = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ oder spezifische Impulse von $J'/m_0 \doteq c\sqrt{2\,\varepsilon} = w = 4{,}2 \cdot 10^3$ m/sec oder 0,42 secton/kg.

Kernreaktionen mit $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ ergeben $J'/m_0 = w = 3 \cdot 10^7$ m/sec oder 3000 secton/kg, während bei hundertprozentiger Umwandlung ($\varepsilon = 1$) der spezifische Impuls auf 30500 secton/kg als Grenzwert anwächst.

Dem Arbeitsprozeß der meisten derzeit bearbeiteten Raketentriebwerke liegt dieser spezielle Vorgang adiabatischer Beschleunigung einer Masse mit totaler Energieübertragung an die Treibstoffmassen zugrunde. Wir haben diese adiabatischen Raketensysteme zur Unterscheidung von den im nächsten Abschnitt behandelten daher kurz Totalraketen genannt.

Für die mit ihnen erreichbare Fluggeschwindigkeit v im widerstands- und schwerefreien Raum in Abhängigkeit von der relativen Treibstoffladung m_0/M_0 gilt bekanntlich[1] die relativistische, sogenannte Raketengrundgleichung

$$\frac{m_0}{M_0} = 1 - \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\right)^{\frac{c}{2w}}, \tag{9}$$

worin M_0 die Anfangsruhemasse der Rakete und m_0 ihre anfängliche Treibstoff-Ruhemasse ist. Nach Einführung der Energieausbeute ε kann man sie auch in der Form schreiben

$$\frac{m_0}{M_0} = 1 - \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}}}, \tag{9a}$$

worin sich ε wie bisher auf das triebwerksfeste Koordinatensystem bezieht. Im nichtrelativistischen Bereich kleiner und mittlerer v und w geht sie in die klassische Raketengrundgleichung über

$$\frac{m}{M} = 1 - e^{-v/w} \tag{10}$$

bzw.

$$\frac{m}{M} = 1 - e^{-\frac{v}{c\sqrt{2\varepsilon}}}. \tag{10a}$$

3. Partialraketen. Es ist für raketentechnische Zwecke interessant, den bisher behandelten speziellen Vorgang noch dahingehend zu verallgemeinern, daß man die freigemachte Energie $\varepsilon m_0 c^2$ nicht gleichmäßig auf die totale restliche Ruhemasse $m_0' = (1 - \varepsilon) m_0$ aufteilt, sondern einem Bruchteil π von m_0' keine Energie zukommen läßt, also nur den Rest $(1 - \pi) m_0' = (1 - \pi)(1 - \varepsilon) m_0$ auf eine Geschwindigkeit w diabatisch beschleunigt, während der Bruchteil $\pi m_0' = \pi (1 - \varepsilon) m_0$ in Ruhe zum Triebwerk bleibt.

a) Theorie der Partialraketen. Aus der Adiabatenbedingung, daß die Summe der trägen Massen bei dem Vorgang wieder konstant und gleich m_0 bleiben muß, folgt für die erreichbare Geschwindigkeit w folgende Überlegung.

Die Anfangsruhemasse m_0 verwandelt sich zu einem Teil εm_0 in Energie, während der Restbetrag $m_0' = (1 - \varepsilon) m_0$ übrigbleibt. Von diesem Restbetrag bleibt der Anteil $\pi m_0' = \pi (1 - \varepsilon) m_0$ endgültig in Ruhe zum Triebwerk, während der andere Teil $(1 - \pi) m_0' = (1 - \pi)(1 - \varepsilon) m_0$ mit Hilfe des verwandelten Energieäquivalentes εm_0 auf die Geschwindigkeit w gebracht wird, wobei seine gesamte träge Masse also $(1 - \pi)(1 - \varepsilon) m_0 + \varepsilon m_0 = m_0 [1 - \pi (1 - \varepsilon)]$ wird, während seine Ruhemasse natürlich $(1 - \pi)(1 - \varepsilon) m_0$ bleibt.

Da die Ruhemasse sich zur trägen Masse immer wie $\sqrt{1 - w^2/c^2}$ verhält, folgt

$$\frac{w}{c} = \frac{\sqrt{2\varepsilon(1 - \pi) - \varepsilon^2(1 - 2\pi)}}{1 - \pi(1 - \varepsilon)}. \tag{11}$$

Die kinetische Energie ist wieder gleich der aktivierten Energie:

$$E' = \varepsilon m_0 c^2 = (m_0 - m_0') c^2 = m_0 c^2 \frac{(1 - \pi)\left(1 - \sqrt{1 - w^2/c^2}\right)}{\sqrt{1 - w^2/c^2} + (1 - \pi)\left(1 - \sqrt{1 - w^2/c^2}\right)}. \tag{12}$$

Der gewonnene Impuls ist

$$J' = (1 - \pi) m_0' w + \varepsilon m_0 w = m_0 w [1 - \pi (1 - \varepsilon)] = m_0 c \sqrt{2\varepsilon(1 - \pi) - \varepsilon^2 (1 - 2\pi)}, \tag{13}$$

daher die Impulsausbeute

$$\iota = J'/m_0 c = \sqrt{2\varepsilon(1 - \pi) - \varepsilon^2(1 - 2\pi)} = [1 - \pi(1 - \varepsilon)] w/c \tag{14}$$

[1] *J. Ackeret*, Helv. Physica Acta 19 (1946), S. 103.

und der massenspezifische Impuls

$$J'/m_0 = c \cdot \sqrt{2\,\varepsilon\,(1-\pi) - \varepsilon^2\,(1-2\,\pi)} = [1-\pi\,(1-\varepsilon)]\,w\,, \tag{15}$$

schließlich der energiespezifische Impuls

$$J'/E' = \frac{\sqrt{2\,\varepsilon(1-\pi) - \varepsilon^2(1-2\pi)}}{\varepsilon\,c} = \frac{1}{c}\,\frac{w}{c}\,\frac{[1-\pi(1-\varepsilon)][\sqrt{1-w^2/c^2} + (1-\pi)(1-\sqrt{1-w^2/c^2})]}{(1-\pi)(1-\sqrt{1-w^2/c^2})} \tag{16}$$

Die Impulsausbeute ι und damit auch der massenspezifische Impuls sind in Abb. 2 als Funktion der Energieausbeute ε und der Partialität π dargestellt. In den Grenzfällen $\pi = 0$ und $\pi = 1$ verhalten sie sich wie

$$\frac{\iota\,(\pi=0)}{\iota\,(\pi=1)} = \sqrt{1+(1-\varepsilon)\,2/\varepsilon}\,, \tag{17}$$

d. h. in allen von $\varepsilon = 1$ verschiedenen Fällen hat die Photonenrakete ($\pi = 1$) schlechtere Impulsausbeute als die Totalrakete ($\pi = 0$).

In Abb. 2 bedeutet nämlich die Partialität $\pi = 0$ wieder den schon eingangs behandelten Fall der Total-Raketen, wo die freigesetzte Energie zur Beschleunigung der gesamten verbleibenden Masse verwendet wird. Dieser Fall gibt bei gleicher Energieausbeute immer die höchste Impulsausbeute.

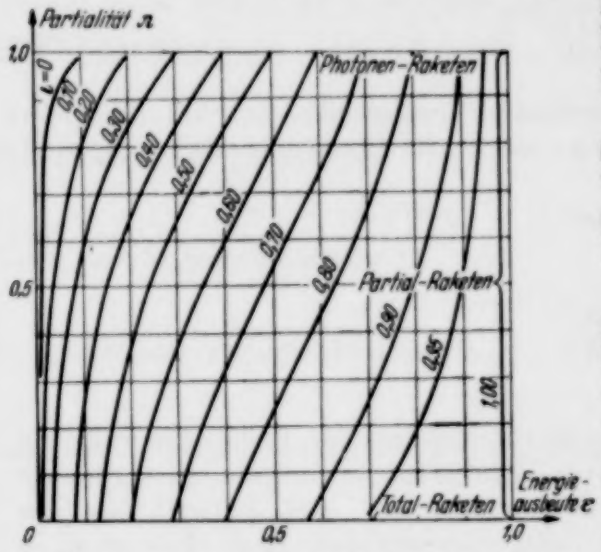

Abb. 2. Impulsausbeute ι der Partialraketen in Abhängigkeit von der Energieausbeute ε und der Partialität π. (Der massenspezifische Impuls ergibt sich aus ι durch Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit c.)

Partialität $\pi = 1$ bedeutet, daß nur die freigesetzte Energie in Form von Photonen ausgesendet wird, während die gesamte, nicht umgewandelte Treibstoffmasse in Ruhe bleibt. Die Impulsausbeute dieser Photonenraketen ist immer am kleinsten.

Die Unterschiede der Impulsausbeute sind naturgemäß am größten, wenn die Energieausbeute ε klein bleibt, da dann die größten Massenbeträge für den Impuls unausgewertet bleiben, die Unterschiede werden dementsprechend immer geringer, je größer ε wird.

Bei $\varepsilon = 1$, also völliger Massenzerstrahlung, hat die Impulsausbeute ihr absolutes Maximum Eins, alle Werte von π beziehen sich hier auf die gleiche, verschwundene Restmasse Null, und sind unter sich also gleichwertig, es liegt der Fall der totalen Photonenrakete vor.

Solange wir in der Raketentechnik nur die geringen Energieausbeuten chemischer Reaktionen zur Verfügung haben, ist das Interesse, diese geringen Energien der gesamten Treibstoffmasse mitzuteilen, daher groß. Die Impulsausbeute verhält sich hier in den Fällen $\pi = 0$ und $\pi = 1$ etwa wie $\sqrt{2/\varepsilon}$.

Mit dem $\varepsilon = 10^{-10}$ chemischer Reaktionen fanden wir für $\pi = 0$ den massenspezifischen Impuls zu etwa 0,42 secton/kg, als Photonenrakete mit $\pi = 1$ betrüge er in diesem Fall nur etwa ein Hunderttausendstel, nämlich $3 \cdot 10^{-6}$ secton/kg. Die Photonenrakete auf chemischer Treibstoffbasis ist daher wohl als Scheinwerfer, nicht aber als Triebwerk von Interesse.

Mit dem $\varepsilon = 7 \cdot 10^{-3}$ der Wasserstoff-Helium-Reaktion wird der massenspezifische Impuls für $\pi = 0$ nach (8b) etwa $3{,}55 \cdot 10^7$ m/sec oder 3550 secton/kg; für $\pi = 1$ nach (15) etwa $2{,}1 \cdot 10^6$ m/sec oder 210 secton/kg, d. h. die Wasserstoff–Helium-Photonenrakete hat nurmehr etwa siebzehnmal geringere Impulsausbeute, als die totale Wasserstoff-Helium-Rakete. Sie könnte daher durchaus praktisches Interesse bieten, wenn ihre Verwirklichung geringere technische Schwierigkeiten bereitet, als jene der entsprechenden Totalrakete.

b) Partialraketen mit Inertmassen. In den Bereich der Partialraketen gehören von vornherein auch alle Raketen-Vorschläge, bei denen inerte Massen m_{02} durch Energieträger m_{01} mit der Ausbeute ε_1 auf thermischem oder elektrischem Wege beschleunigt werden, während die nichtumgewandelten Energieträgermassen nicht beschleunigt werden, z. B. thermische Atomraketen oder elektrische Ionenraketen [1,2,3,4,5] wo die — etwa im Uran-

[1] *J. Ackeret*, a. a. O. [2] *H. Oberth*, Wege zur Raumschiffahrt, München 1929 und Ann Arbour 1945.
[3] *L.R.Shepherd* u. *A.V.Cleuver*, J. Brit. Interpl. Soc. 8 (1949) S. 59.
[4] *J. Bredt*, Naturforschg. 6a, 2 (1951) S. 103. [5] *L.Spitzer*, J. Brit. Interpl. Soc. 10 (1951) S. 249.

meiler gewonnenen — Energien zur entweder thermischen Beschleunigung von Wasserstoffplasma auf Geschwindigkeiten von der Größenordnung $2 \cdot 10^4$ m/sec, oder elektrischen Beschleunigung von Ionen auf Geschwindigkeiten zwischen 10^5 und 10^6 m/sec dienen sollen.

Mit einer Energieausbeute ε_1 des Energiestoffes m_{01} im Meiler und der zusätzlichen Plasmen- oder Ionen-Ruhemasse m_{02} wird die gesamte Energieausbeute

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{1}{1 + m_{02}/m_{01}} \tag{18}$$

und die Partialität

$$\pi = \frac{1 - \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1 + m_{02}/m_{01}}, \tag{19}$$

womit alle weiteren Größen nach den Gleichungen (11) bis (17) berechenbar sind. Die darin immer wiederkehrenden Ausdrücke werden

$$a = \sqrt{2\,\varepsilon\,(1-\pi) - \varepsilon^2\,(1-2\,\pi)} = \sqrt{\frac{2\,\varepsilon_1\,(m_{02}/m_{01})\,(1 + m_{02}/m_{01}) + \varepsilon_1^2\,(1 - \varepsilon_1 - m_{02}/m_{01})}{(1 + m_{02}/m_{01})^2\,(1 - \varepsilon_1 + m_{02}/m_{01})}} \tag{20}$$

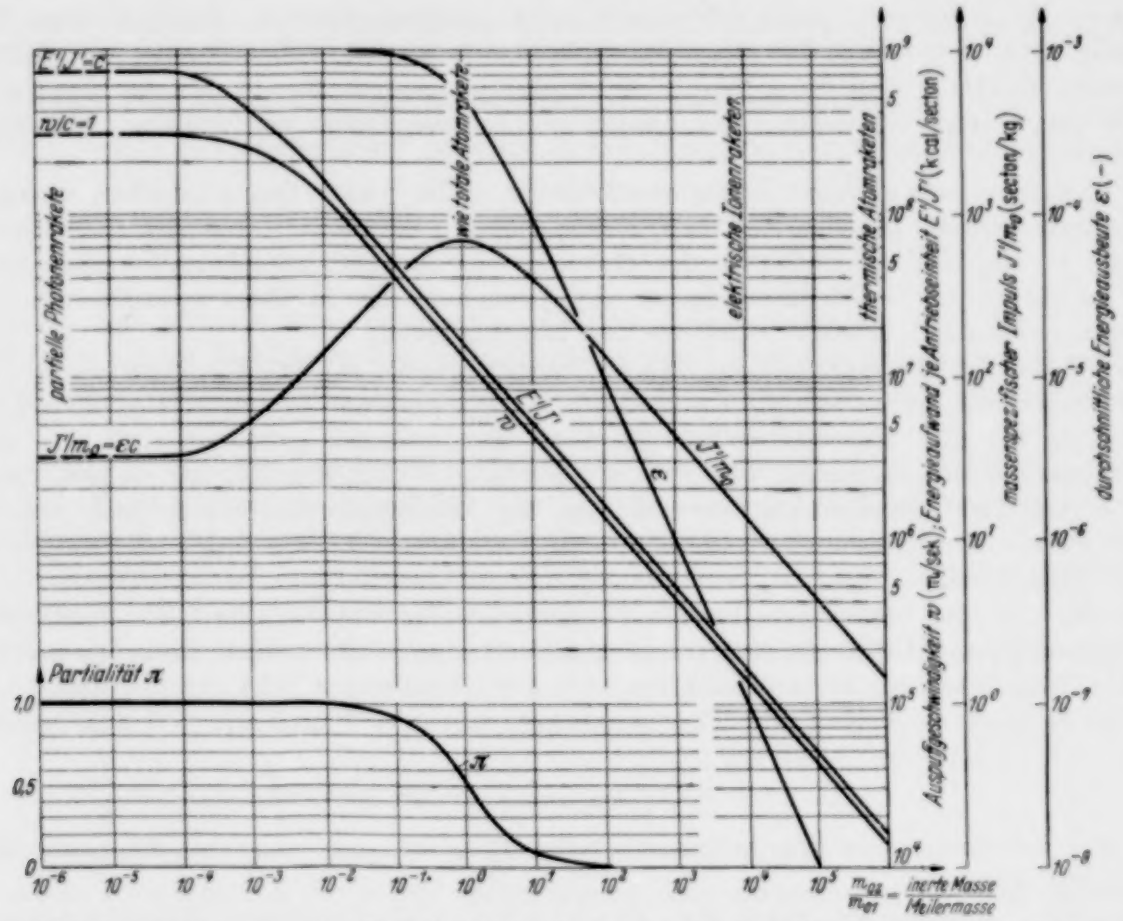

Abb. 3. Partial-Raketen mit Inertmassen; Veränderlichkeit über m_{02}/m_{01} der Auspuffgeschwindigkeit und des massenspezifischen und energiespezifischen Impulses, ferner der durchschnittlichen Impulsausbeute, für Atom-, Ionen-, und Photonen-Raketen mit Meilerheizung von $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ Energieausbeute.

und

$$b = 1 - \pi\,(1 - \varepsilon) = \frac{\varepsilon_1 + m_{02}/m_{01}}{1 + m_{02}/m_{01}} \tag{21}$$

und damit

$$w/c = a/b\,, \tag{22}$$

$$J'/m_0 = a\,c = b\,w, \tag{23}$$

$$J'/E' = a/\varepsilon\,c = (w/c)\;b/\varepsilon\,c\,. \tag{24}$$

In Abb. 3 sind diese Größen über m_{02}/m_{01} für $\varepsilon_1 = 10^{-3}$, wie es etwa einem leichten Uranmeiler entsprechen könnte, aufgetragen.

Der Grenzfall $m_{02}/m_{01} = 0$ bedeutet die Photonenrakete mit

$$\varepsilon = \varepsilon_1;\quad \pi = 1;\quad a = \varepsilon_1;\quad b = \varepsilon_1;\quad w/c = 1;\quad J'/m_0 = \varepsilon_1 c;\quad J'/E' = 1/c.$$

Der massenspezifische Impuls und der Wert a haben ein Maximum, wenn die beschleunigte Masse $m_{02}+\varepsilon_1 m_{01}$ gleich ist der Meilermasse m_{01}, also bei

$$m_{02}/m_{01}=1-\varepsilon_1\,, \tag{25}$$

und zwar von der Höhe

$$(J'/m_0)_{max}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{2-\varepsilon_1}}\,c\,. \tag{26}$$

Dieser Fall hat offenbar gleiche Antriebseigenschaften wie jener der Totalrakete, nur daß hier nicht die unumgewandelte Meilermasse $(1-\varepsilon_1)m_{01}$, sondern die gleich große Inertmasse m_{02} beschleunigt wird. Dieses Maximum ist daher $1/\sqrt{2\varepsilon_1-\varepsilon_1^2}$-mal größer, als die Impulsausbeute der entsprechenden Photonenrakete gleicher Energieausbeute ε_1. Der Verwirklichung dieser günstigsten Partialrakete stehen jedoch dieselben praktischen Schwierigkeiten entgegen, wie der entsprechenden totalen Atomrakete. Eine der Ursachen dieser Schwierigkeiten ist der in Abb. 3 ebenfalls als Energieaufwand je Antriebseinheit aufgetragene Kehrwert des energiespezifischen Impulses J'/E'. Mit der Größe dieses Energieaufwandes wachsen bei vielen Bauarten die unvermeidlichen Wärmeübergänge an das Triebwerk selbst, wodurch die thermischen Atomraketen gegenwärtig auf den eingezeichneten Bereich der Auspuffgeschwindigkeiten um $w=20000$ m/sec beschränkt erscheinen, während man bei elektrischen Ionenraketen durch Vermeidung hoher Arbeitstemperaturen glaubt bis an den in Abb. 3 gleichfalls eingezeichneten Bereich der Auspuffgeschwindigkeiten von 10^5 bis 10^6 m/sec gehen zu können.

Die Photonenrakete gleicher Energieausbeute $\varepsilon_1=10^{-3}$ hat etwa ähnlichen massenspezifischen Impuls, wie die genannten Ionenraketen, jedoch bei mehrtausendfach höherem Energieaufwand je Impulseinheit. Sie ist also gegen die Ionenrakete nur dann wettbewerbsfähig, wenn der zu befürchtende Wärmeübergang aus Ursachen, die in ihrer spezifischen Arbeitsweise liegen, wesentlich kleiner wird, als bei Ionenraketen.

In Abb. 3 ist noch bemerkenswert, daß im Bereich großer m_{02}/m_{01} die Auspuffgeschwindigkeit w, der massenspezifische Impuls w und der Energieaufwand je Impulseinheit $w/2$ parallel verlaufen, wie wir dies von nichtrelativistischen Totalraketen gewöhnt sind. In der Tat sind die typischen Eigenschaften der Partialraketen auf den Bereich der m_{02}/m_{01} zwischen etwa 10^{-4} und 10^{+2} beschränkt, unterhalb ist die Wirkungsweise schon praktisch die der partiellen Photonenraketen, oberhalb die von Totalraketen, wie auch die π-Werte über m_{02}/m_{01} in Abb. 3 zeigen.

Es ist für die hier betrachtete zweite, diabatische Art von Raketen, die Partialraketen, wichtig, festzuhalten, daß die Auspuffgeschwindigkeit w selbst kein Maß mehr für den massenspezifischen Impuls ist, wie auch der Unterschied der Gleichungen (8b) und (15) zeigt. Aus der letzten folgt beispielsweise, daß eine Photonenrakete mit $\pi=1$ und $w/c=1$ den spezifischen Impuls

$$J'/m_0=\varepsilon\,c \tag{27}$$

hat, der also bei konstanter Auspuffgeschwindigkeit $w=c$ nur von der Energieausbeute ε der Treibstoffe abhängt.

c) Flugleistungen mit Partialraketen. Bei diesen Raketen zweiter Art, die wir kurz Partialraketen nannten, da sie einen Teil ihrer verbrauchten Treibstoffe nicht abstoßen, erhebt sich das Problem, was mit dem nichtausgestoßenen, verbrauchten Treibstoffrest geschieht. Dies ist zwar für den bisher untersuchten spezifischen Impuls und dessen Kehrwert, den spezifischen Treibstoffverbrauch, gleichgültig; wenn sie jedoch an Bord belassen werden, belasten sie das spezifische Triebwerksgewicht und beeinflussen damit die bei gegebenem Treibstoffvorrat erzielbaren Flugleistungen, bzw. die mit dem Raketenfahrzeug erreichbare Endgeschwindigkeit v im ungünstigen Sinn.

Werden die verbrauchten, aber nicht beschleunigten Treibstoffmassen $\pi(1-\varepsilon)m_0$ dauernd an Bord behalten, dann kann man für die erreichbare Fluggeschwindigkeit v die Raketengrundgleichung (9) für Totalraketen benützen, wenn man $\pi(1-\varepsilon)m_0$ überhaupt nicht zu den Treibstoffmassen m_0 zählt und für w den Wert aus (11) einführt.

Werden jedoch die verbrauchten, aber nicht beschleunigten Treibstoffmassen ohne Relativgeschwindigkeit zum Fahrzeug und kontinuierlich von Bord gegeben, so ändert sich die relativistische Raketengrundgleichung, da die Auspuffgeschwindigkeit nicht mehr mit der vollen Treibstoffmasse, sondern mit der um den geschwindigkeitslos abgetrennten Teil $\pi(1-\varepsilon)m_0$

verringerten Masse $[1-\pi(1-\varepsilon)\,m_0]$ wirkt, in

$$\frac{m_0}{M_0}=1-\left(\frac{1-v/c}{1+v/c}\right)^{\frac{c\cdot f}{2w\,[1-\pi(1-\varepsilon)]}}, \tag{28}$$

wie man auch durch eine der *Ackeret*schen Herleitung der Gleichung (9) analoge Ableitung finden kann.

Im nichtrelativistischen Bereich kleiner und mittlerer v und w degeneriert diese Beziehung zu der klassischen Grundgleichung der Partialraketen

$$\frac{m}{M}=1-e^{-v/w\,[1-\pi(1-\varepsilon)]}. \tag{29}$$

Die Anfangsruhemasse M_0 des Fahrzeuges umfaßt:

1. die Treibstoffmasse m_0, die ihrerseits bei Partialraketen zerfällt in
   a) den zu beschleunigenden Anteil $[1-\pi(1-\varepsilon)]m_0$,
   b) den nicht zu beschleunigenden Anteil $\pi(1-\varepsilon)m_0$;
2. die Triebwerksmasse m_{0t} (Eigentliches Triebwerk, Tankanlagen, Triebwerksnebeneinrichtungen usw.);
3. die restliche Fahrzeugmasse m_{0f} (Zelle, Nutzlast, Ausrüstung usw.);

Im Falle des an Bord behaltenen Anteiles $\pi(1-\varepsilon)\,m_0$ gilt daher Gleichung (9) in der Form

$$\frac{m_0}{M_0}=\frac{1}{1+m_{0t}/m_0+m_{0f}/m_0}=\left[1-\left(\frac{1-v/c}{1+v/c}\right)^{\frac{c}{2w}}\right]\Big/\Big[1-\pi(1-\varepsilon)\Big]. \tag{30}$$

Für w/c kann man je nach dem vorliegenden Fall die Gleichungen (6), (11) oder (22) einführen. Wünscht man v/c als Funktion des massenspezifischen Impulses oder des spezifischen Treibstoffverbrauches auszudrücken, so können dazu die Gleichungen (8b) bzw. (15) oder (23) dienen.

Das spezifische Triebwerksgewicht $(1/\iota c)m_{0t}/m_0$ ist in (30) ebenfalls enthalten. Da dieses Triebwerksgewicht je Impulseinheit bei den hier behandelten Raketen außerordentlich von der angewendeten Fahrzeugbeschleunigung abhängt und daher weniger wie eine technische Triebwerkskennzahl benützt werden kann, als das Triebwerksgewicht je Schubeinheit, werden wir davon hier keinen weiteren Gebrauch machen.

Im Falle des geschwindigkeitslos von Bord gegebenen Anteiles $\pi(1-\varepsilon)m_0$ gilt dagegen (28) unmittelbar:

$$\frac{m_0}{M_0}=\frac{1}{1+m_{0t}/m_0+m_{0f}/m_0}=1-\left(\frac{1-v/c}{1+v/c}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon(1-\pi)-\varepsilon^2(1-2\pi)}}}, \tag{31}$$

wofür dieselben Zusatzbemerkungen wie für (30) gelten.

In beiden Fällen läßt sich die im schwerefreien und widerstandsfreien Raum erreichbare Fluggeschwindigkeit v/c als Funktion von m_0/M_0, ε und π darstellen. Dies ist in Abb. 4 geschehen für den Gesamtbereich der Totalraketen, Partialraketen und Partialraketen mit Inertmassen, so daß dieses Diagramm also chemische Raketen, thermische Atomraketen, elektrische Ionenraketen und Photonenraketen umfaßt. Dabei wurden folgende Beziehungen benützt:

ohne Massenauswurf, im relativistischen Bereich:

$$\frac{v}{c}=\frac{1-\left\{1-\frac{m_0}{M_0}\,[1-\pi(1-\varepsilon)]\right\}^{\frac{2\sqrt{2\varepsilon(1-\pi)-\varepsilon^2(1-2\pi)}}{1-\pi(1-\varepsilon)}}}{1+\left\{1-\frac{m_0}{M_0}\,[1-\pi(1-\varepsilon)]\right\}^{\frac{2\sqrt{2\varepsilon(1-\pi)-\varepsilon^2(1-2\pi)}}{1-\pi(1-\varepsilon)}}}, \tag{32}$$

ohne Massenauswurf, im nichtrelativistischen Bereich

$$\frac{v}{c}=-\frac{\sqrt{2\varepsilon(1-\pi)-\varepsilon^2(1-2\pi)}}{1-\pi(1-\varepsilon)}\ln\left\{1-\frac{m_0}{M_0}\,[1-\pi(1-\varepsilon)]\right\}, \tag{33}$$

mit Massenauswurf, im relativistischen Bereich

$$\frac{v}{c}=\frac{1-\left(1-\frac{m_0}{M_0}\right)^{2\sqrt{2\varepsilon(1-\pi)-\varepsilon^2(1-2\pi)}}}{1+\left(1-\frac{m_0}{M_0}\right)^{2\sqrt{2\varepsilon(1-\pi)-\varepsilon^2(1-2\pi)}}}, \tag{34}$$

mit Massenauswurf im nichtrelativistischen Bereich

$$\frac{v}{c}=-\sqrt{2\varepsilon(1-\pi)-\varepsilon^2(1-2\pi)}\ln\left(1-\frac{m_0}{M_0}\right). \tag{35}$$

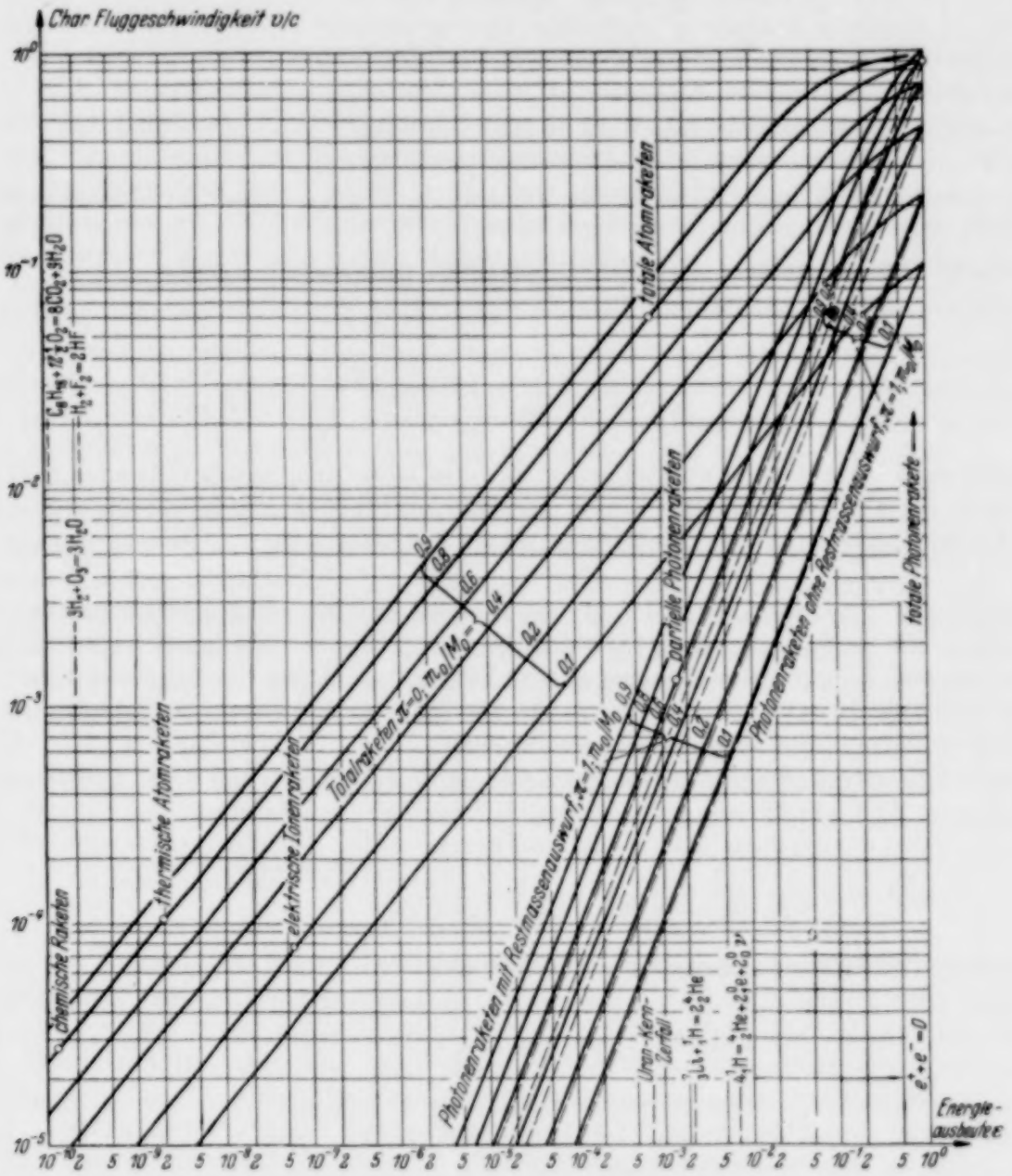

Abb. 4. Erreichbare charakteristische Fluggeschwindigkeiten v/c mit einstufigen Total- und Partial-Raketen der Treibstoffladung m_0/M_0, über der Energieausbeute ε.

Für $\pi=0$ (Totalraketen) geben die Gleichungen (32) und (34) bzw. (33) und (35) natürlich jeweils gleiche Ergebnisse:

Totalraketen, relativistisch (entsprechend (9a))

$$\frac{v}{c}=\frac{1-\left(1-\frac{m_0}{M_0}\right)^{2\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}}{1+\left(1-\frac{m_0}{M_0}\right)^{2\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}}, \tag{36}$$

Totalraketen, klassisch (entsprechend (10a))

$$\frac{v}{c} = -\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}\,\ln\left(1 - \frac{m_0}{M_0}\right). \tag{37}$$

Für den hier besonders interessanten Fall $\pi = 1$, $\varepsilon \neq 1$ (partielle Photonenraketen) vereinfachen sich die vier Gleichungen folgendermaßen:

partielle Photonenraketen, ohne Massenauswurf, relativistisch

$$\frac{v}{c} = \frac{1-(1-\varepsilon\, m_0/M_0)^2}{1+(1-\varepsilon\, m_0/M_0)^2}, \tag{37}$$

partielle Photonenraketen, ohne Massenauswurf, klassisch

$$\frac{v}{c} = -\ln(1-\varepsilon\, m_0/M_0), \tag{38}$$

partielle Photonenraketen, mit Massenauswurf, relativistisch

$$\frac{v}{c} = \frac{1-(1-m_0/M_0)^{2\varepsilon}}{1+(1-m_0/M_0)^{2\varepsilon}}, \tag{39}$$

partielle Photonenraketen, mit Massenauswurf, klassisch

$$\frac{v}{c} = -\varepsilon \ln(1-m_0/M_0), \tag{40}$$

Für $\pi = 1$, $\varepsilon = 1$ (Totale Photonenraketen) werden die Resultate beider Gleichungsgruppen wieder gleich und hier unabhängig von π:

totale Photonenrakete, relativistisch

$$\frac{v}{c} = \frac{1-(1-m_0/M_0)^2}{1+(1-m_0/M_0)^2}, \tag{41}$$

totale Photonenrakete, klassisch

$$\frac{v}{c} = -\ln(1-m_0/M_0). \tag{42}$$

Einige dieser Beziehungen sind in Abb. 4 zahlenmäßig dargestellt, so daß sich die mit einstufigen Total- und Partialraketen erreichbaren charakteristischen Fluggeschwindigkeiten v in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit c direkt ablesen lassen.

Die charakteristische Fluggeschwindigkeit v ist die bei beliebigem Beschleunigungsvorgang im widerstands- und schwerefreien Raum unmittelbar erreichbare Fahrzeuggeschwindigkeit.

Jeder praktischen Flugaufgabe kann man bekanntlich[1] eine solche charakteristische Geschwindigkeit zuordnen, die nicht tatsächlich erreicht zu werden braucht, die aber die notwendige Treibstoffmasse zur Erfüllung des Fahrtauftrages kennzeichnet. Beispielsweise beträgt sie für einen Überschallflug um den halben Erdumfang etwa $v/c \sim 2 \cdot 10^{-5}$, für den Aufstieg zu einer Erdaußenstation $v/c \sim 3 \cdot 10^{-5}$, für das Verlassen des Erdschwerefeldes $v/c \sim 4{,}5 \cdot 10^{-5}$, für eine Fahrt von der Erdoberfläche zur Marsoberfläche und zurück etwa $v/c = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$, zum Verlassen des Schwerefeldes der Sonne rund $v/c \sim 1{,}3 \cdot 10^{-4}$.

Als Abszissen sind die Energieausbeuten ε aufgetragen, über den Bereichen der chemischen Reaktionen, der Gemische von Kernreaktionsprodukten mit Inertmassen, der reinen Kernreaktionen, bis zur vollständigen Massenzerstrahlung, also von $\varepsilon = 10^{-10}$ bis $\varepsilon = 1$.

Von den Partialitäten π sind, um das Bild nicht zu überladen, nur die beiden Grenzfälle $\pi = 0$ (Totalraketen) und $\pi = 1$ (Photonenraketen), letztere mit und ohne Massenauswurf, in Form von drei Kurvenscharen eingezeichnet, deren einzelne Kurven jeweils die praktisch interessierenden Verhältnisse m_0/M_0 von Treibstoffmasse zu Anfangs-Fahrzeugmasse enthalten.

Man erkennt sofort wieder, daß im ε-Bereich chemischer Reaktionen die Photonenraketen völlig uninteressant sind und praktisch nur Totalraketen eine Rolle spielen können, wie dies auch wirklich der Fall ist.

Die Gemische von Kernreaktionsenergie mit Inertmassen, wie sie beispielsweise von thermischen Atomraketen und elektrischen Ionenraketen verwendet werden sollen, haben

[1] *A. C. Clarke*, Interplanetary Flight, London 1950.

nach (18) durchschnittliche Energieausbeuten zwischen denen der chemischen und Kern-Reaktionen, während diese Raketensysteme praktisch immer (siehe Abb. 3) als Totalraketen betrachtet werden können ($\pi = 0$), so daß ihre Flugleistungen aus deren Kurvenschar abzulesen sind.

Wenn man bedenkt, daß bei einstufigen, thermischen Atomraketen Treibstoffladungen von $m_0/M_0 = 0{,}8$ vorstellbar sind, bei elektrischen Ionenraketen wegen der außerordentlichen Triebwerksgewichte wahrscheinlich nur wesentlich kleinere Treibstoffladungen von vielleicht $m_0/M_0 = 0{,}2$, dann erscheint selbst bei sehr schwach beschleunigten Fahrzeugen die Überlegenheit der Ionenrakete über die thermische Atomrakete keineswegs sicher. Dazu muß noch beachtet werden, daß die thermische Atomrakete sowohl für starkbeschleunigte (Luftfahrt) als auch für schwachbeschleunigte (Interplanetare Raumfahrt) Fahrten geeignet erscheint, während die Ionenrakete sich sicher nur für letztere eignen könnte.

Anderseits dürfte die vorausgesetzte Auspuffgeschwindigkeit von $w = 20000$ m/sec für thermische Wasserstoff-Atomraketen ebenfalls eine alleräußerste Grenze darstellen, die durch die starke Ionisation des Wasserstoffplasmas bei sehr hohen Temperaturen und das damit unter Eins sinkende Atomgewicht des Plasmas begünstigt wird. Die Vorstufe dieser starken Ionisation ist aber eine sehr hohe Elektronenanregung der Wasserstoffatome, d.h. sehr intensive Strahlung des Plasmas, die zu sehr hohen Wärmeübergängen an die Ofenwände führen kann. Eine Folge der starken Ionisation gerade bei Wasserstoff ist anderseits die rasche Zunahme der freien Weglängen des Protonen-Elektronen-Gases, die allmählich mit den Ofenabmessungen vergleichbar werden und dann zu den sehr ungünstigen gaskinetischen Strömungs- und Konvektions-Verhältnissen führen[1,2,3].

In den Bereich der Energieausbeuten von Kernreaktionen kann man mit Totalraketen aus den bekannten Gründen nicht vorstoßen, möglicherweise aber mit partiellen Photonenraketen, die nach Abb. 4 sowohl den thermischen Atomraketen, als auch den elektrischen Ionenraketen sehr überlegen sein könnten, trotz der aus der Abbildung deutlich erkennbaren grundsätzlichen Unterlegenheit der Photonenraketen gegenüber den Totalraketen bei gleicher Energieausbeute, wie die Kurvenschar der Partialraketen mit $\pi = 1$ zeigt.

Mit der partiellen Photonenrakete gelangen charakteristische Fluggeschwindigkeiten von $v/c = 10^{-3}$ oder $v = 300000$ m/sec in den technischen Möglichkeitsbereich.

Schließlich ist zu Vergleichszwecken in Abb. 4 noch eine dritte Kurvenschar der partiellen Photonenraketen ($\pi = 1$) ohne Massenauswurf eingezeichnet.

Die verbrauchten, aber an Bord behaltenen Treibstoffmassen machen sich natürlich in der erreichten Endfluggeschwindigkeit umso stärker bemerkbar, je größer die Treibstoffzuladung m_0/M_0 an sich ist, und je geringer deren Umwandlungsgrad ε bleibt.

Die Linien gleicher Treibstoffladung m_0/M_0 jeder Kurvenschar konvergieren naturgemäß mit wachsender Energieausbeute ε, bis schließlich alle Raketensysteme in die totale Photonenrakete mit völliger Treibmassenzerstrahlung einmünden, deren charakteristische Fluggeschwindigkeiten sich auch bei mäßigen Treibstoffladungen der Lichtgeschwindigkeit nähern.

Weitere Kurvenscharen für beliebige π-Werte zwischen Null und Eins lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (32) bis (42) ohne weiteres in Abb. 4 eintragen.

4. Partielle Photonenraketen. Die Photonenrakete als Spezialfall $\pi = 1$ der Partialraketen, mit dem massenspezifischen Impuls $J'/m_0 = \varepsilon c$, dem energiespezifischen Impuls $J'/E' = 1/c$ und der Auspuffgeschwindigkeit $w = c$ kann gegenüber der Totalrakete gleicher Energieausbeute ε dadurch interessant werden, daß sich die Photonen leichter in eine gewünschte Richtung lenken lassen, als die korpuskularen Produkte der Atomreaktion selbst.

Abb. 5 gibt vorerst die bekannte Übersicht über das Gesamtgebiet der elektromagnetischen Strahlung, geordnet nach Wellenlängen in cm, also über die Arten der Photonen und ihre wesentlichsten Eigenschaften.

a) Reflektor. Die hier zunächst interessierende Lenkung von Photonen in eine gewünschte Richtung fällt in das Gebiet der Optik, gegebenenfalls der Röntgen- und Gamma-Optik, wobei die optischen Reflexionskoeffizienten in unserem Zusammenhang eine ausschlaggebende Rolle spielen.

---

[1] *E. Sänger*, Gaskinetik sehr großer Fluggeschwindigkeiten, Deutsche Luftfahrtforschung F.B. 972, Berlin 1938, Douglas Aircraft Comp., Transl. FR 369, Santa Monica 1946, N.A.C.A. Techn. Mem. 1270. Washington 1950.

[2] *E. Sänger*, Schweizer Arch. angew. Wissensch. Technik 16 (1950). S. 43.

[3] *E. Sänger*, J. Métaux 22 (1952), S. 44.

Bei chemischen Raketen beträgt der Wärmeübergang an die feuerberührten Wände rund ein Hundertstel der umgesetzten Energien, also etwa 100 kcal/secton, der in der Regel von den Treibstoffen selbst, vor deren Einbringung in den Ofen, aufgenommen wird.

Bei den Projekten der Ionenraketen sehr geringer Beschleunigung wird mitunter angenommen, daß bis zu $^2/_3$ der umgesetzten Energie als Wärmeübergang an das Fahrzeug zulässig und durch Strahlungsflächen nach außen abgebbar wären, d.h. über 240000 kcal/secton, bei einem nützlichen Energieaufwand je Antriebseinheit nach Abb. 3 von etwa 120000 kcal/secton.

Wenn dieser letzte Wert sich bei Photonraketen nach Abb. 3 um 7.10^8 kcal/secton bewegt, also fast 6000fach höher ist, und bei schwach beschleunigten Photonenraketen derselbe absolute Wärmeübergang je Antriebseinheit wie bei Ionenraketen als zulässig angesehen wird, dann dürften bei der Photonenrakete also etwa 0,34 Promille der umgesetzten Energie an das Fahrzeug, d.h. also praktisch an die Photonenoptik übergehen.

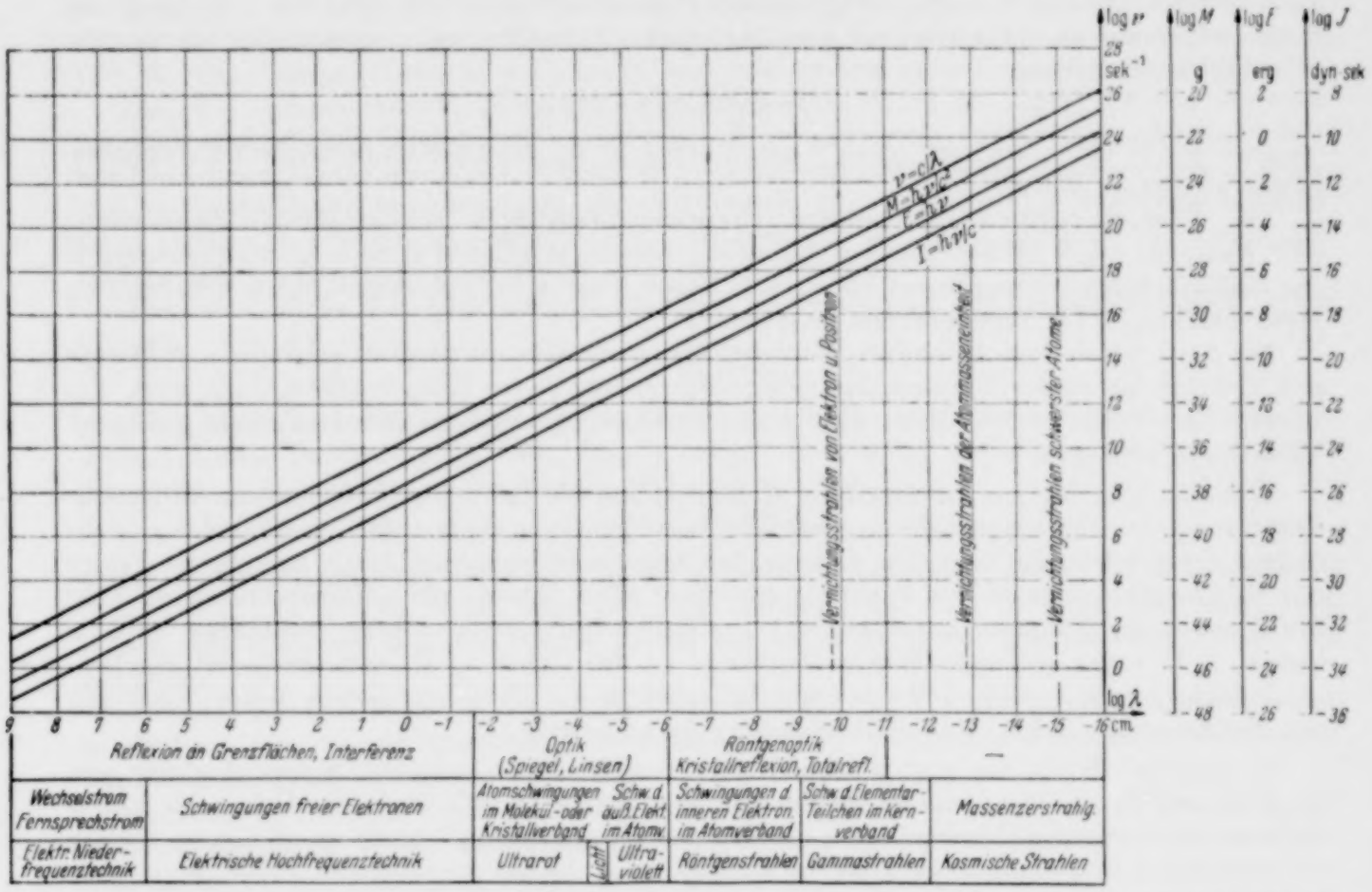

Abb. 5. Photonenarten, Erzeugung, Lenkung, Frequenz ν, Energie $h\nu$, Masse $h\nu/c^2$ und Impuls $h\nu/c$ über der Wellenlänge $\lambda = c/\nu$.

Sobald die optischen Reflexionskoeffizienten also höher als 0,9997 werden, ist in dieser Hinsicht Wettbewerbsfähigkeit mit der Ionenrakete möglich, wenn man an ein gekühltes Spiegelsystem nach Art von Scheinwerfern denkt. Bei Totalreflexion nähert sich der optische Reflexionskoeffizient tatsächlich dem Wert Eins, es wird dem zweiten Medium keine Energie zugeführt. Es ist dies der in der Grenzflächenphysik einzigartige Fall eines Impulsaustausches fast ohne Energieaustausch, mit Reflexionsgraden der Größenordnung $(1 - 10^{-7})$. Bei senkrechtem Strahleinfall auf glatte Metalloberflächen nimmt das Reflexionsvermögen mit abnehmender Wellenlänge von Werten nahe an Eins im Ultrarot und teilweise auch noch im Sichtbaren bis zu kleinen Werten im Ultraviolett ab. An Metallspiegeln mit Verstärkerlamellen hat man durch Ausnützung der entstehenden Interferenz und des Phasensprunges in der Lamelle Vorderflächen-Silberspiegel mit einem Reflexionsgrad von 0,995 für weißes Licht erreicht, während normale Oberflächen-Silberspiegel nur bis 0,95 reflektieren.

Im Röntgen- und Gamma-Gebiet sind die Verhältnisse wesentlich ungünstiger, dort bleiben für Photonenlenkung nur die *Bragg*sche Kristallreflexion und die Totalreflexion übrig. Bei Kristallreflexion im Gamma-Gebiet werden erfahrungsgemäß weniger als 1% der einfallenden Intensität reflektiert.

Totalreflexion derart kurzer Wellen tritt nur bei sehr streifendem Einfall auf, da die Brechungszahlen der kurzwelligen Photonen nur sehr wenig von Eins abweichen. Es scheinen sich also am ehesten im langwelligeren Bereich Möglichkeiten für die erforderlichen hohen Reflexionszahlen zu eröffnen. Dabei wird noch von Bedeutung sein, daß die hohe Reflexion bei ganz außerordentlich hohen Strahlungsintensitäten und gegebenenfalls bei hohen Temperaturen der reflektierenden Oberflächen erreicht werden muß.

Hier tut sich ein weitgehend neuer Forschungsbereich der physikalischen Optik auf. Welche Reflexionszahlen man aber auch immer erreichen wird, geht ein kleiner Teil der Energie an das Reflexionssystem über, der auf geeignete Weise aus dem Fahrzeug entfernt werden muß. Man könnte beispielsweise an eine stufenförmige Reflexion der Art denken, daß die Ursprungsintensität I_1 des Photonengenerators mit der Reflexionszahl r_1 von einem Spiegel zurückgeworfen wird, der die aufgenommene Intensität $(1-r_1)I_1$ von einer α-fach größeren Fläche der Temperatur T einem zweiten Spiegel schwarz zustrahlt, welch letzterer diese Restintensität in einer zweiten Stufe in die gewünschte Richtung reflektiert, falls die Gleichrichtung dieser Abwärme noch für lohnend gehalten wird. Zwischen den einzelnen Größen besteht offenbar die Beziehung

$$(1-r_1)I_1 = \alpha\sigma T^4,$$

worin $\sigma = 5{,}77\cdot10^{-12}$ Watt cm^{-2}grad^{-4} die Strahlzahl im *Stefan-Boltzmann*schen Strahlungsgesetz schwarzer Körper ist.

Für Photonenraketen interessieren Ursprungsintensitäten bis in die Größenordnung 10^{10} Watt/cm^2 $=2{,}4\cdot10^6$ kcal/cm^{2}sec. Bei den praktisch möglichen Strahlungstemperaturen T der Kühlflächen wird man meist zu beträchtlichen Werten für α kommen, die den bekannten Kühlvorschlägen für Ionenraketen entsprechen.

Mit $\alpha = 1$ würde man besondere Einrichtungen zum Wärmetransport ersparen und könnte mit T daher bis an die Grenzen der Glühtemperaturen fester Körper gehen, doch setzt dies wieder sehr kleine $(1-r_1)$ voraus, über deren Realisierungsmöglichkeiten noch nicht genügend Kenntnisse vorliegen.

Während also für das unmittelbare Gleichrichten der Reaktionsprodukte von Kernreaktionen zunächst überhaupt keine technischen Lösungen zu erkennen sind, und für das Gleichrichten solcher Impulse über den Umweg der Ionenbeschleunigung durch elektrische Felder mit $^2/_3$ Energieverlust an das Fahrzeug gerechnet wird, könnte ein Gleichrichtvorgang über den Umweg der Photonen trotz seiner prinzipiellen Energievergeudung technische Vorteile bieten, u. U. sogar geringere Wärmeübergänge an das Fahrzeug je Antriebseinheit ergeben.

Jedenfalls erweist sich, daß das erste Teilproblem der Photonenraketen in der Schaffung von Reflektoren allerhöchsten Reflexionsvermögens besteht.

b) Lampe. Wenn das erste Problem einer möglichst verlustlosen Photonenlenkung uns zunächst auf das Gebiet längerer Wellen verweist, so deckt sich diese Tendenz nach Abb. 5 auch mit dem zweiten Hauptproblem der Photonenerzeugung selbst, wo zweifellos im Gebiet der sichtbaren und ihnen benachbarten Wellenlängen die umfangreichsten Erfahrungen und Möglichkeiten vorliegen. Wegen der viel zu geringen zulässigen Temperaturen und Strahlungsintensitäten fester Körper kommt in erster Linie Gasstrahlung in Frage.

Bei der Anregung von Gasmolekülen entstehen Rotationsspektren im fernen Ultrarot, Rotations + Schwingungs-Spektren im nahen Ultrarot und im Sichtbaren, Rotations + Schwingungs + Elektronen-Spektren im Sichtbaren und im Ultraviolett. Atomgase liefern Spektren der Valenzelektronen und Ionisations-Spektren im Sichtbaren und beiden Nachbargebieten. Die Möglichkeiten der Molekül- und Atomanregung von Gasen sind in erster Linie:

a) thermisch (Flammen, Lichtbogen, Sterne, Entladungslampen, Funkenentladung, Blitz, starke Verdichtungsstöße, Detonationsstöße, Kernreaktionen usw.),

b) chemisch (Chemilumineszenz, Flammen, Nachthimmelleuchten, Phosphor, kalte Natrium-Chlor-Reaktion usw.),

c) elektrisch (Glimmentladung, elektrische Entladungsröhren, Nordlicht usw.),

d) optisch (Fluoreszenz, Kometen, Ionosphäre usw.).

Hier interessiert zunächst besonders die thermische Anregungsmöglichkeit von Gasen unmittelbar durch Kernreaktionen.

Ersetzt man in glühenden Gasplasmen, wie sie beispielsweise in Hochstrombogen, Quecksilberdampflampen, Xenonlampen usw. auftreten, die elektrische Energiezufuhr zum Plasma durch eine stationäre Kernreaktion, d.h. den Elektronenstoßprozeß durch den Prozeß der

Stöße von Kernreaktionsprodukten, so erhält man in dieser „Kern-Lampe" ein Gerät zur direkten Umsetzung von Kernenergie in Photonen, wobei die Art der erzeugten Photonen durch die Auswahl der Gasfüllung beeinflußt werden kann.

Hier eröffnet sich ein zweiter, weiter Forschungsbereich eines Grenzgebietes zwischen physikalischer Optik und Atomphysik, mit dem Ziel, den Wirkungsgrad dieser Umsetzung in die nützlichen, mittelwelligen Photonen möglichst hoch zu treiben und kurzwellige Kernstrahlung ebenso wie Gasionisation weitgehend zu unterdrücken.

Man ist in elektrisch stationär beheizten Plasmen anscheinend noch nicht über stationäre Plasmentemperaturen von 50000° K gegangen[1], während man sich in diskontinuierlichen Hochstrombögen bei den Versuchen der chemischen Zündung thermischer Kernreaktionen sehr kurzzeitig den zehnfachen Werten nähert.

Jedenfalls erlaubt die Kernheizung eines Plasmas ohne weiteres dauernd die in Detonationsstößen vermuteten[2] Plasmentemperaturen der Größenordnung 100000° K aufrechtzuerhalten, bei denen praktisch alle Atome des Plasmas zur Strahlung angeregt werden, und die Strahlungsintensität I bei optisch unendlicher Schichtdicke der Gasmasse auf die Größenordnung 10^{10} Watt/cm^2 steigen kann, entsprechend Lichtdrücken von etwa $I/c = 3{,}4$ Atmosphären.

Die in Photonenraketen technisch erforderlichen Lichtdrücke liegen bei den schwach beschleunigten Fahrzeugen der interplanetaren Raumfahrt etwa um 0,01 atm., bei den stark beschleunigten Fahrzeugen der Luftfahrt und der interstellaren Raumfahrt bis gegen 10 atm., also im wesentlichen im Bereich der durch Gasstrahlung wahrscheinlich erzielbaren Werte. Dem genannten oberen Lichtdruckbereich entsprechen natürlich auch die höchsten Anforderungen an den Reflektor.

Die Schichtdicke der strahlenden Gasschicht wird etwa dann als optisch unendlich gelten können, wenn sie

$$n = 4{,}6\, d^2/Q$$

mittlere Atomabstände d beträgt[3], wobei Q der optische Wirkungsquerschnitt eines Atoms ist. Zwischen dem Durchmesser D einer kugelförmigen Kernlampe und dem in ihr herrschenden Gasdruck p muß demnach die Beziehung bestehen

$$pD = 4{,}6\, kT/Q\,,$$

wenn T die Plasmatemperatur und k die *Boltzmann*-Konstante sind. Mit beispielsweise $T = 10^5$° K und $Q = 10^{-20}$ cm^2 folgt $pD = 6{,}5 \cdot 10^3$ atm. cm, d.h. man hat Interesse, eine einzige große Lampe und nicht viele kleine zur Herstellung des gewünschten Schubes zu benützen.

Derselbe Gesichtspunkt wird wahrscheinlich auch für den Vorgang der Kernreaktion selbst maßgebend sein, wo ein unzulässiges Abdiffundieren der wirksamen Reaktionspartner durch entsprechend große Werte von pD verhindert werden muß.

Z.B. finden *Shepherd-Cleaver*[4], allerdings auf Grund etwas veralteter Unterlagen, für einen gasförmigen Wasserstoff-Uranmeiler ein notwendiges $pD = 1{,}2 \cdot 10^6$ atm. cm, also unausführbar große Meilerdurchmesser. Für thermische Kernaufbau-Reaktionen scheinen diese Werte jedoch ganz erheblich kleiner zu sein, und sich denen der optischen Durchmesserbedingung zu nähern.

Die bisher ausschließlich betrachtete rein thermische Anregung des leuchtenden Gases braucht indes nicht die einzige Lösungsmöglichkeit zu sein.

Im Interesse der sehr schwierigen Kühlungsverhältnisse der Kernlampen liegt es, in Analogie zur Chemilumineszenz auch eine direkte Übertragung der Kernreaktionsenergie an Atomanregung ohne den Umweg über die übrigen thermische Freiheitsgrade in Erwägung zu ziehen, wobei also z.B. die Translationstemperatur des Gases relativ niedrig bleiben könnte. Damit würde natürlich die Erwärmung der Lampenwände durch Konvektion, aber noch nicht jene durch Strahlungsabsorption infolge mangelhafter Strahlungsdurchlässigkeit vermindert.

5. Totale Photonenrakete. Die totale Photonenrakete mit einem spezifischen Impuls von 30500 secton/kg wäre auf weitere Zukunft gesehen zweifellos die Endlösung des Strahlantriebsproblemes für Luftfahrt und Raumfahrt. Derzeit fehlen für ihre technische Inangriffnahme jedoch noch die wesentlichsten physikalischen Voraussetzungen.

---

[1] *W. H. Westphal*, Physikalisches Wörterbuch, S. 467, Berlin 1952.
[2] *E. Sänger*, Z. Sprengtechnik 1 (1952), S. 151.
[3] *E. Sänger*, Z. Brennstoff-Chemie 32 (1951), S. 36.
[4] *L. R. Shepherd* u. *A. V. Cleaver*, J. Brit. Interpl. Soc. 81 (1949), S. 36.

Die vollständige Massenzerstrahlung ist in Form der Elektron-Positron-Reaktion vor kaum zwanzig Jahren als Laboratoriumsexperiment erstmals gelungen, für eine Übertragbarkeit in technischen Maßstab sind noch keinerlei Handhaben bekannt geworden, insbesondere ist die offenbar im Kosmos auftretende Zerstrahlung größerer Partikel, wie Atome, auch im physikalischen Experiment noch nicht darstellbar.

Die Wellenlängen der bei solchen Umwandlungen entstehenden Photonen liegen im Bereich der Gamma- und kosmischen Strahlung, z.B. für die Elektron-Zerstrahlung bei $2{,}43 \cdot 10^{-10}$ cm, für die Proton-Zerstrahlung bei $1{,}33 \cdot 10^{-13}$ cm, für die Uranatom-Zerstrahlung bei $1{,}45 \cdot 10^{-15}$ cm.

Um die nach unseren Betrachtungen zum Reflektor-Problem erwünschten Photonen im Bereich des sichtbaren Lichtes durch Massenzerstrahlung unmittelbar zu erhalten, müßten Partikel von etwa einem Millionstel der Elektronenmasse zur Verfügung stehen, wie sie sich vielleicht in den Neutrinos andeuten. Anderseits scheint eine Wellenlängen-Transformation im technischen Maßstab, etwa mit Vorrichtungen nach Art der erwogenen Kernlampe, bei derart kurzen Primärwellenlängen nicht sehr erfolgversprechend, wie die außerordentliche Durchdringungskraft der Photonen kosmischer Strahlen zeigt.

Insgesamt scheinen somit die physikalischen Voraussetzungen für eine Inangriffnahme technischer Forschungsarbeiten in Richtung der totalen Photonenrakete noch nicht auszureichen, während diese Voraussetzungen für die partiellen Photonenraketen vielleicht schon in naher Zukunft bestehen werden, so daß deren vorbereitende Bearbeitung gerechtfertigt erscheint.

(Eingegangen am 13. November 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Eugen Sänger*, Courcelle-sur-Yvette, Frankreich (S. et O.)

Inhalt:

Seite

Grammel, R., Die stationären Bewegungen des selbsterregten Kreisels und ihre Stabilität 149

Pichler, O., Anwendung der Matrizenrechnung zur Erfassung von Betriebsabläufen. Mit 2 Textabbildungen 157

Truckenbrodt, E., Die Berechnung des Profilwiderstandes aus der vorgegebenen Profilform. Mit 9 Textabbildungen 176

Craemer, H., Zur Systematik des plastischen Momenten- und Spannungsausgleichs in Stabwerken unter Biegung. Mit 5 Textabbildungen 187

Byrd P. F. u. *M. T. Huggins*, Zur Berechnung von Wirbelverteilung und Auftrieb eines dünnen Unterschallprofils in zwei hintereinander angeordneten Flügelgittern bei kompressiblen Strömungen 191

Jung, H., Ein Beitrag zur nichtlinearen Elastizitätstheorie. Mit 2 Textabbildungen 194

Desoyer, K. u. *A. Slibar*, Zur Berechnung von Pendel-Schwingungstilgern. Mit 2 Textabbildungen 208

Sänger, E., Zur Theorie der Photonenraketen. Mit 5 Textabbildungen .. 213

Unveränderter Nachdruck 1975
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
Herstellung:
Strauß & Cramer GmbH, 6901 Leutershausen